Lycée Khaïr Eddine (Ariana) 4ème Scexp Azaïez Mohamed Ali

Fonction logarithme Népérien

I- Fonction logarithme Népérien :

1)Définition : La fonction ln est la primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

$$\ln :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

(f est définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x)$ avec $f(1)=0$) $\Leftrightarrow$ (f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x)=\frac{1}{x}$).

2)Conséquences :

- la fonction : $x \mapsto \ln(x)$ est définie continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x)=\frac{1}{x}>0$.
- la fonction : $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
- Il existe un unique réel noté $e \simeq 2{,}71\,82\,81\,82\,84 \ldots \notin \mathbb{Q}$ tel que : $\ln(e)=1$.
- a et b étant deux réels strictement positifs :
  - ($\ln(a) = \ln(b)$) Ssi ($a=b$).
  - ($\ln(a) = 0$) Ssi ($a = 1$).
  - ($\ln(a) = 1$) Ssi ($a = e$).
  - ($\ln(a) \geq \ln(b)$) Ssi ($a \geq b$).
  - ($\ln(a) > 0$) Ssi ($a > 1$).
  - ($\ln(a)<0$) Ssi ($0<a<1$).

3)Activité② : p126

4)Propriétés algébriques : Pour tous réels strictement positifs a et b on a :

- $\ln(a\times b) = \ln(a)+\ln(b)$;
- $\ln(a^n) = n.\ln(a)$ avec $n\in\mathbb{Z}$.
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a)-\ln(b)$;
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$;
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$;
- $\ln\left(\sqrt[n]{a}\right) = \frac{1}{n}\ln(a)$ avec $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 2$.
- Si ($r\in\mathbb{Q}$) alors ($\ln(e^r) = r$)
- Si ($\ln(a) = r\in\mathbb{Q}$) alors ($a=e^r$).

Remarques :

- (a et b sont deux réels tels que : $ab>0$) $\Rightarrow$ ($\ln(a\times b)=\ln|a|+\ln|b|$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln|a|-\ln|b|$).
- (a est un réel non nul et n un entier pair) $\Rightarrow$ ($\ln(a^n) = n\ln|a|$).

5)Activités②page128 :

6)Représentation graphique de : $x\mapsto\ln(x)$

www.BAC.org.tn Page BAC-TUNISIE Tél: 25 361 197 / 53 371 502

Théorème :(limites) (admis)

$\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$.

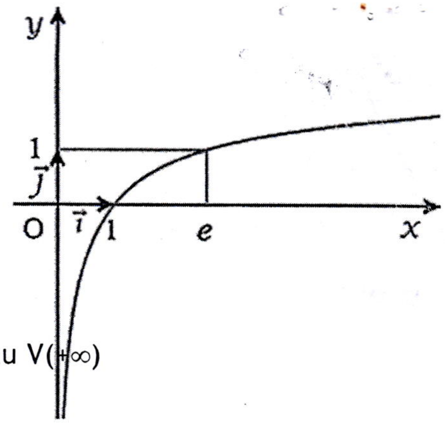
Tableau de variations :

La fonction : $x\longmapsto\ln(x)$ est la primitive de : $x\longmapsto\frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$, qui s'annule en 1.

Donc : $x\longmapsto\ln(x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $(\ln x)'=\frac{1}{x}>0$

Donc : $x\longmapsto\ln(x)$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

x	0		1		e		$+\infty$
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$



$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc : $x = 0$ est une asymptote verticale à Cf à droite de 0.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0^+$ donc Cf admet une branche infinie de direction horizontale au V($+\infty$)

Conséquences :

- $x \mapsto \ln(x)$ est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$

  donc : $x \mapsto \ln(x)$ réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$.

- Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $(x\ln(x)-x)' = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - x = \ln x$

  donc: $x \mapsto x\ln(x)-x$ est une primitive de : $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0;+\infty[$.

T tangente à C au point rep de $x \mapsto \ln x$ en $x=1$
$T : y = f'(1)(x-1)+f(1)$ $f'(1)=1$
$1(x-1)+0$ $f(1)=0$
$= x-1$
$T' : y = \frac{1}{e}x$ $f'(e)=\frac{1}{e}$
$f(e)=1$

7)Limites : n et m étant deux entiers naturels non nuls.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ √ $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0^-$ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^m \ln^n(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ √ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0^+$ √ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln^n(x)}{x^m} = 0^+$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$ $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ tel que f est d en 1

7) Exercices n°4,5 et 6 page 134 :

II - Fonction ln o u :

1)Domaine de définition :

Si ($x \mapsto u(x)$ est définie et strictement positive sur $\mathcal{D}$) alors ($x \mapsto \ln[u(x)]$ est définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$) .

Si ($x \mapsto u(x)$ est définie et non nulle sur $\mathcal{D}$) alors ($x \mapsto \ln|u(x)|$ est définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$).

2)Théorème : (Dérivabilité)

$\ln(u(x)) = u'(x) \times \ln'(u(x))$
$= u'(x) \times \frac{1}{u(x)}$
$\ln(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

(u dérivable strictement positive sur I) $\Rightarrow \left(\begin{array}{l} \ln(u(x)) \text{ est dérivable sur I} \\ \left[\ln(u(x))\right]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)} \end{array} \right)$.

(u dérivable non nulle sur l'intervalle I) $\Rightarrow \left(\begin{array}{l} \ln(u(x)) \text{ est dérivable sur I} \\ \left[\ln|u(x)|\right]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)} \end{array} \right)$.

3)Conséquences : (Primitive)

(u continue et strictement positive sur l'intervalle I) $\Rightarrow \left(\begin{array}{l} \ln[u(x)] + k \text{ est une primitive sur I} \\ \text{de} : x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)} \end{array} \right)$

(u continue et non nulle sur l'intervalle I) $\Rightarrow \left(\begin{array}{l} \ln|u(x)| + k \text{ est une primitive sur I} \\ \text{de} : x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)} \end{array} \right)$.

4)Activités ②→⑥ : pages 131&132 .

$\boxed{x\ln x - x}$ est une primitive de $x \mapsto \ln x$ sur $]0;+\infty[$

EXERCICE :(Principal 2016)

A) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2\ln x-x+\dfrac{1}{x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a/ Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$.

b/ Montrer que $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite $\Delta : y=-x$.

2) a/ Vérifier que pour tout $x\in\,]0;+\infty[$, $f'(x)=-\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$.

b/ Dresser le tableau de variations de f.

c/ Calculer f(1). En déduire le signe de f(x) pour $x\in\,]0;+\infty[$.

d/ Montrer que I(1; 0) est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

3) a/ Tracer la courbe Cf.

b/ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$ l'axe des abscisseset les droites x =1 et x=e.

4) Soit x > 0.

a/ Vérifier que : $f\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

b/En remarquant que : $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}>1$, montrer que : $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\leq\dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

B] Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln^2\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$.

1) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_3.

2) a/ Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b/Montrer que : pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$.

c/ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\leq 1-\dfrac{1}{n+1}$.

d/ En déduire que (u_n)est convergente vers un réel ℓ et que $0,7<\ell\leq 1$.

Azaiez Mohamed Ali
www.BAC.org.tn
www.BAC.org.tn Page BAC-TUNISIE Tél: 25 361 197 / 53 371 502