La fonction logarithme Népérien

La fonction logarithme Néperien notée Ln est la primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

$f : x \longmapsto Ln\, x$

$Df =]0,+\infty[$

$f(1) = Ln\, 1 = 0$

$f'(x) = (Ln\, x)' = \frac{1}{x} > 0$

x	0		1		$+\infty$
$Ln(x)$	||	$-$	0	$+$	

$Ln\, x = Ln\, y \iff x = y$

$Ln\, x > Ln\, y \iff x > y$

$x > 0$ et $y > 0$

$$Ln\,(a \cdot b) = Ln(a) + Ln\,(b)$$

$$Ln\left(\frac{a}{b}\right) = Ln\,(a) - Ln\,(b)$$

$$Ln\left(\frac{1}{b}\right) = -Ln\,(b) \Rightarrow \overset{0}{Ln(1)} - Ln\,(b)$$

$$Ln\,(a^n) = n \cdot Ln\,(a) \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$Ln\,(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\, Ln\,(a)$$

$$Ln\,|a \cdot b| = Ln\,|a| + Ln\,|b|$$

$Ln\,(a+b) \Rightarrow$ impossible

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln(2x+5))' = \frac{2}{2x+5}$$

$$(\ln(4-3x))' = \frac{-3}{4-3x}$$

$$(\ln(x^2+1))' = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$(\ln \star)' = \frac{\star'}{\star}$$

Exemple :

$$(\ln(x^2+x+1))' = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

$$(\ln U(x))' = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \cdot \ln x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\ln e = 1$$

عدد صحيح

Fonctions Logarithmes

$f(x) = \ln(x)$ $x > 0$

$D_f =]0;+\infty[$

Tableau de signe

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$2\ln x$		$-$	0	$+$	
$-2\ln x$		$+$	0	$-$	

* $\lim\limits_{0^+} \ln x = -\infty$
* $\lim\limits_{+\infty} \ln x = +\infty$
* $\lim\limits_{0^+} x^n \ln x = 0$
* $\lim\limits_{+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
* $\lim\limits_{1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
* $\lim\limits_{0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

* $\ln 1 = 0$
* $\ln e = 1$
* $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
* $(\ln U(x))' = \frac{U'(x)}{U(x)}$
* $(\ln(x^2+1))' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$

* $e \simeq 2{,}7$
* $\frac{1}{2}(\ln x)^2 \xleftarrow{P} \frac{\ln x}{x}$

* $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$
* $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
* $\ln(a^n) = n.\ln(a)$
* $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
* $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

$\rightarrow \ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}\underbrace{\ln e}_{1} = \frac{1}{2}$

$\ln(a+b) \Rightarrow$ Impo

$\lim\limits_{0^+} f(x) = \infty$ ⇒ La droite d'éq $x = 0$ est une Asy verticale à $\mathcal{C}f$

$x=0$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = 2$ ⇒ La droite d'éq $y = 2$ est une Asy horizontale à $\mathcal{C}f$ au $V(+\infty)$

$y=2$

$\Delta : y = ax + b$ Asy oblique à $\mathcal{C}f$ au $V(+\infty)$

Si $\lim\limits_{+\infty} [f(x) - \underbrace{(ax+b)}_{y_\Delta}] = 0$

$$\lim_{+\infty} f(x) = \infty$$

نزيد نحسب

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

- ∞ : B.I.P $(0; \vec{J})$
- 0 : B.I.P $(0. \vec{i})$
- 120 : $\lim\limits_{+\infty} [f(x) - 120x] = \infty$ B.I.P V du $D : y = 120x$

$$T : y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Fonction logarithme Népérien

① $\lim\limits_{x \to 0^+} \overset{0}{x \ln x} + 2 = 2$

② $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \overset{0}{\frac{\ln x}{x}} = 1$

③ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\overset{-\infty}{\ln x}}{\underset{0^+}{x}} = -\infty$

④ $\lim \overset{0}{x} \left(\frac{\overset{0}{\ln x}}{\underset{-\infty}{}} - 1 \right)$ FIndéterminé

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \underset{0}{\underline{x \ln x}} - \underset{0}{\underline{x}} = 0$

⑤ $\lim\limits_{x \to 0^+} \underset{-\infty}{\frac{\ln x}{x}} + \frac{1}{\underset{0^+}{x}}$ $\overset{+\infty}{=}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{(\overset{0}{x \ln x} + 1))\ 1}{\underset{0^+}{x}} = +\infty$

⑥ $\lim\limits_{x \to +\infty} \overset{+\infty}{x} - \overset{-\infty}{\ln x}$ FI

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \underset{+\infty}{x} \left(\underbrace{1 - \overset{0}{\frac{\ln x}{x}}}_{1} \right) = +\infty$

⑦ $\lim \left(\overset{+\infty}{\underset{x \cdot x}{x^2}} - \overset{-\infty}{x \ln x} \right)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left| 1 - \frac{x \ln x}{\underset{x \cdot x}{x^2}} \right. = \lim\limits_{x \to +\infty} \underset{+\infty}{x^2} \left(\underbrace{1 - \frac{\ln x}{\underset{0}{x}}}_{1} \right)$

$= +\infty$

Logarithme Népérien

La f° logarithme Népérien notée **Ln** est la primitive de la f° $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

$$f(x) = Ln(x) = Ln(\overset{>0}{x})$$

→ $Df =]0; +\infty[$

→ $f'(x) = (Ln\,x)' = \frac{1^{+}}{x_{+}} > 0$

→

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

→ $Ln\,x = Ln\,y \iff x = y$ (avec $x>0$ et $y>0$)

$Ln\,x > Ln\,y \iff x > y$

→

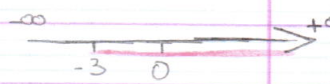
x	0		1		$+\infty$
$Ln\,x$	‖	$-$	$\vert$	$+$	
$2\,Ln\,x$	‖	$-$	$\vert$	$+$	
$-2\,Ln\,x$	‖	$+$	$\vert$	$-$	

App :

$f(x) = Ln(x+3)$

1) $Df = ?$; cond : $x+3>0$

$x > -3$



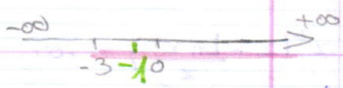
$Df =]-3; +\infty[$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$

a) $Ln(x+3) = Ln(2)$

cond : $x+3>0$

$x > -3$



$Ln(x+3) = Ln\,2$

$x+3 = 2$

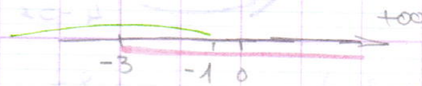
$x = 2-3 = -1$

$S_{\mathbb{R}} = \{-1\}$

b) $Ln(x+3) < Ln\,2$

cond : $x+3>0$

$x > -3$



$Ln(x+3) < Ln\,2$

$x+3 < 2$

$x < -1$

$S_{\mathbb{R}} =]-3; -1[$

c) $Ln(x+3) \leq Ln(2)$

$x+3 \leq 2$

$x \leq -1$

$S_{\mathbb{R}} =]-3; -1]$

Dérivés:

$\ln x \longleftarrow \frac{1}{x}$

$\ln(x+1) \longleftarrow \frac{1}{x+1}$

$\ln(2x+1) \longleftarrow \frac{2}{2x+1}$

$\ln(4-5x) \longleftarrow \frac{-5}{4-5x}$

$\ln(x^2+1) \longleftarrow \frac{2x}{x^2+1}$

$\ln(x^3+1) \longleftarrow \frac{3x^2}{x^3+1}$

$\ln(x^3+x^2+x+1) \longleftarrow \frac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x+1}$

$\ln(U(x)) \xleftarrow{P} \frac{U'(x)}{U(x)}$

Exercice:

Calculer la dérivée

① $f(x) = 2x+1+\ln x$

$f'(x) = 2 + \frac{1}{x}$

② $f(x) = 3x - 3\ln(x) + 2$

$f'(x) = 3 - 3 \times \frac{1}{x} = 3 - \frac{3}{x}$

③ $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$f'(x) = \frac{(\ln x)'.x - (x)'.\ln x}{x^2}$

$= \frac{1-\ln x}{x^2}$

④ $f(x) = x.\ln x$

$f'(x) = (x').\ln x + (\ln x)' x$

$= \ln x + \frac{1}{x} x$

$= \ln x + 1$

⑤ $f(x) = 2x + \ln(2x^2+1)$

$f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2+1}$

Propriétés:

- $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$ $\quad a>0$, $b>0$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$; $n \in \mathbb{Z}$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Exercice:

$3(\ln 2 + \ln 5) =$ ⓐ $\ln 100$ ⓑ $\ln 30$ ⓒ $\ln 1000$

$\simeq 6{,}9$ $\quad \simeq 4{,}6$ $\quad \simeq 3{,}4$ $\quad \simeq 6{,}9$

$3(\ln 2 + \ln 5) = 3\ln(2\times 5) = 3\ln(10) = \ln(10^3) = \ln 1000$

Les limites:

- $\lim\limits_{0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{0^+} x.\ln x = 0$
- $\lim\limits_{1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
- $\lim\limits_{+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Exercice: Calculer.

① $\lim\limits_{0^+} 2x - 1 + \ln x = -\infty$

② $\lim\limits_{0^+} 3x\ln x - 2 = -2$

③ $\lim\limits_{+\infty} 1 + \frac{2\ln x}{x} = 1$

④ $\lim\limits_{0^+} x(3 - \ln x)$

$= \lim\limits_{0^+} 3x - x\ln x = 0$

⑤ $\lim\limits_{+\infty} 3x - \ln x$

$= \lim\limits_{+\infty} x\left(3 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

⑥ $\lim\limits_{+\infty} x^3 - x\ln x$

$= \lim\limits_{+\infty} x^2\left(x - \frac{x\ln x}{x^2}\right) = \lim\limits_{+\infty} x^2\left(x - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

P		D
e^{x}	e^{x}	e^{x}
$\frac{1}{2} e^{2x}$	e^{2x}	$2 e^{2x}$
$\frac{1}{3} e^{3x}$	e^{3x}	$3 e^{3x}$
$\frac{1}{K} e^{K+c}$	e^{Kx+c}	$K e^{Kx+c}$
$- e^{-x}$	e^{-x}	$- e^{-x}$

Fonction exponentielle de base e

$f : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$

$x \longrightarrow e^{x}$

$D_f = \mathbb{R}$

$e^{x} > 0$ tout $x \in \mathbb{R}$

$e^{0} = 1$ et $e^{1} = e$

$\ln e^{x} = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$e^{\ln x} = x$ pour $x > 0$

$e^{\ln}$ عدو بعضهم
يمحو بعضهم

$e^{x} = e^{y} \iff x = y$

$e^{x} > e^{y} \iff x > y$

$(e^{x})' = e^{x}$

$(e^{2x})' = 2e^{2x}$

$(e^{3x})' = 3e^{3x}$

$(e^{u(x)})' = u'(x)\, e^{u(x)}$

$(e^{-x})' = -e^{-x}$

$(e^{x^2+x+1})' = (2x+1)\, e^{x^2+x+1}$

$e^{a} \cdot e^{b} = e^{a+b}$

$\dfrac{e^{a}}{e^{b}} = e^{a} - e^{b}$

$(e^{a})^{n} = e^{an}$

$e^{-a} = \dfrac{1}{e^{a}}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x^{n}} = +\infty$ $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{n} e^{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - 1}{x} = 1$