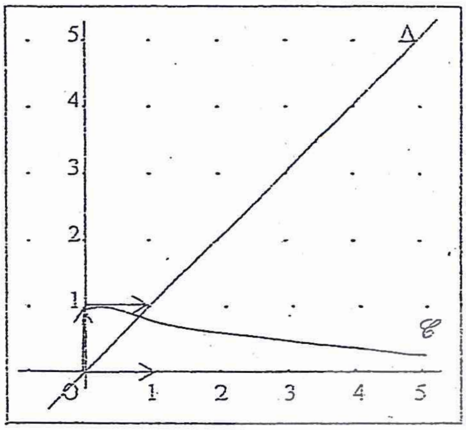
Lycée pilote Sfax / Trigui Mohamed / Série n° 12 / 4ème Math / Année scolaire.

Exercice 1



Dans le graphique ci-contre, la courbe $\mathscr{C}$ est celle d'une fonction f définie sur $[0,+\infty[$. Δ est la droite d'équation $y = x$.

La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à $\mathscr{C}$.

1°/ a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Tracer sur le graphique la courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1}.

d) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f^{-1}(x)}{x-1}$.

2°/ La droite Δ coupe $\mathscr{C}$ en un point M_0 d'abscisse $x_0 \in \left]\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1\right[$

a) Montrer qu'il existe un réel $c \in]0, x_0[$ tel que $f(x_0) = 1 + x_0 f'(c)$.

b) On donne $f(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ et $f(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donner un encadrement de $f'(c)$.

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = x - 1 - 3\sqrt[3]{x-1}$.

1°/ a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2°/ a) Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

b) Tracer $\mathscr{C}$.

3°/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $[2,+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-2,+\infty[$ puis calculer $(g^{-1})'(0)$.

Exercice 3

1°/ Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$.

Dresser le tableau de variation de f.

2° Soit g la fonction définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f(\tan x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(x)$.

b) Montrer que g réalise une bijection de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $]1,+\infty[$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $(g^{-1})'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2+1}$.

3°/ Pour tout x de $]0,+\infty[$, on pose $h(x) = g^{-1}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right) + g^{-1}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}\right)$.

a) Montrer que h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $h'(x)$.

b) Calculer $g^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$. En déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$, $h(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 4

07

Cocher la réponse exacte.

1°/ Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$. Une primitive F de f est définie par

☐ $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ☐ $F(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ ☐ $F(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

2°/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\cos^3 x$. Une primitive G de g est définie sur $\mathbb{R}$ par

☐ $G(x)=\dfrac{1}{4}\cos^4 x$ ☐ $G(x)=\sin x-\dfrac{1}{3}\sin^3 x$ ☐ $G(x)=\sin x+\dfrac{1}{3}\sin^3 x$

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

1°/ Prouver l'existence et l'unicité d'une primitive F de f sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en 0.

2°/ Soit G la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $G(x)=F\left(\tan^2 x\right)$.

a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que $G'(x)=2\tan^2 x$.

b) En déduire que pour tout réel $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $G(x)=2\tan x-2x$.

c) Donner alors $F(1)$ et $F\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=x^2-\sqrt{1-x^2}$.

1°/ a) Montrer que f admet au moins une primitive sur $[-1,1]$.

b) Soit F la primitive de f sur $[-1,1]$ telle que $F(0)=0$ et G la fonction définie sur $[-1,1]$ par $G(x)=F(x)+F(-x)$. Calculer $G'(x)$ pour tout réel x de $[-1,1]$. En déduire que F est impaire.

2°/ Soit H la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $H(x)=F(\cos x)-F(\sin x)$.

a) Montrer que H est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et calculer $H'(x)$ pour tout réel x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) En déduire que pour tout x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $H(x)=x-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{3}\cos^3 x-\dfrac{1}{3}\sin^3 x$ puis calculer $F(1)$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

1° Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2° Soit G la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $G(x)=F(\sin x)$ où F est une primitive de f sur $[0,1]$.

a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et calculer $G'(x)$ pour tout réel x de $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) En déduire que pour tout réel x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $G(x)=x-\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

c) Calculer $F(1)$.

Lycée Pilote Sfax 08

Serie 12

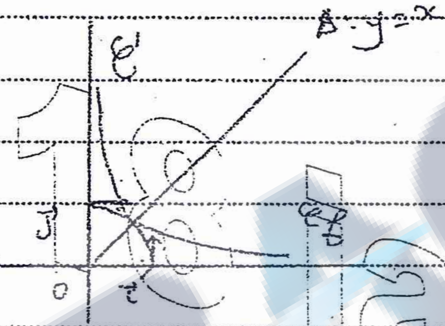
Exercice 1

1/ a)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$
$f(x)$	1	$\searrow 0$

b) f est continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f([0,+\infty[)=J=]0,1]$

c)



d) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f^{-1}(x)}{x-1} = +\infty$ car $\mathscr{C}'$ admet une demi-tangente verticale de direction de $\vec{j}$ (vers le haut) à gauche en 1

2) a) f est continue sur $[0,x_0]$, dérivable sur $]0,x_0[$ donc il existe $c\in]0,x_0[$ tel que $f(x_0)-f(0)=(x_0-0)\times f'(c)$

d'où $f(x_0)=x_0 f'(c)+f(0)=x_0 f'(c)+1$

b) $f\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)=\frac{2\sqrt7}{7}$; $f(1)=\frac{\sqrt2}{2}$ donc $\frac{\sqrt2}{2}<f(x_0)<\frac{2\sqrt7}{7}$ car f est décroissante et $\frac{\sqrt3}{2}<x_0<1$; $1<\frac{1}{x_0}<\frac{2}{\sqrt3}$

$f'(c)=\dfrac{f(x_0)-1}{x_0} \Rightarrow$

$\frac{\sqrt2}{2}-1<f(x_0)-1<\frac{2\sqrt7}{7}-1 \Rightarrow 1-\frac{2\sqrt7}{7}<-(f(x_0)-1)<1-\frac{\sqrt2}{2}=\frac{2-\sqrt2}{2}$

et $1<\frac{1}{x_0}<\frac{2}{\sqrt3}$

$\Rightarrow 1-\frac{2\sqrt7}{7}<-(f'(c))<\frac{2-\sqrt2}{\sqrt3}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt2-2}{3}<f'(c)<\frac{2\sqrt7}{7}-1$

Exercice 2 09

1) a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{x-1} - \dfrac{3\sqrt[3]{x-1}}{x-1} = \lim 1 - \dfrac{3}{(\sqrt[3]{x-1})^2} = -\infty$

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable à droite en 1

$\Rightarrow \mathcal{C}_f$ admet une demi tangente vertical dirigé vers le bas

b) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(\sqrt[3]{x-1})^2} = \dfrac{(\sqrt[3]{x-1})^2 - 1}{(\sqrt[3]{x-1})^2}$; $x > 1$

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	-2	↗ $+\infty$

2) a) $\mathcal{C} \cap (xx')$: $M(x,y) \in \mathcal{C} \cap (xx') \Leftrightarrow y = f(x) = 0$

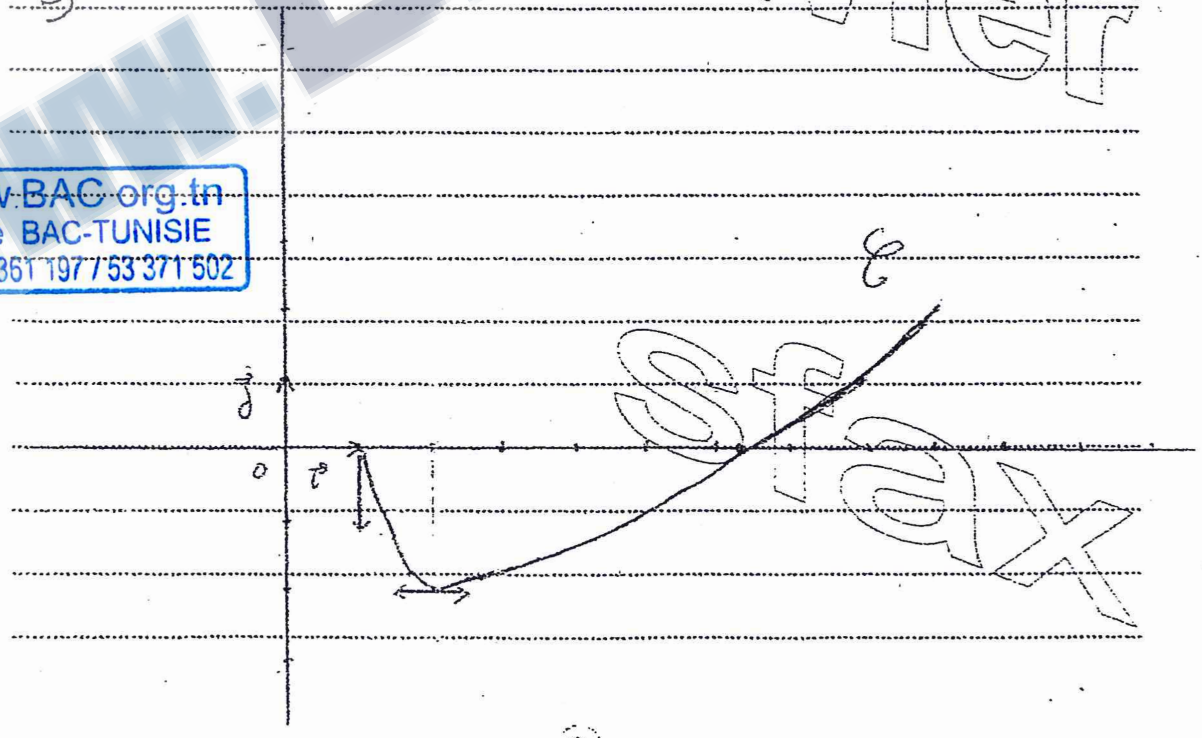
$\Leftrightarrow x - 1 - 3\sqrt[3]{x-1} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x-1})^3 - 3\sqrt[3]{x-1} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1}\left((\sqrt[3]{x-1})^2 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $(\sqrt[3]{x-1})^2 = 3$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $\sqrt[3]{x-1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1$ ou $x - 1 = \sqrt{3}^3 = 3\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 1 + 3\sqrt{3}$

b)



010

3°/ a) g est continue sur $[2,+\infty[$; strictement croissante sur $]2,+\infty[$

donc g réalise une bijection de $[2,+\infty[$ sur $J=f([2,+\infty[)=[-2,+\infty[$

d'où g admet une fonction réciproque $g^{-1}:[2,+\infty[\to J$

b) g est dérivable sur $]2,+\infty[$ et $g'(x)\neq 0$ donc g^{-1} est dérivable

sur $J=]-2,+\infty[$ et on $g^{-1}(0)=1+3\sqrt{3} \Rightarrow (g^{-1})'(0)=\dfrac{1}{g'(g^{-1}(0))}=\dfrac{1}{g'(1+3\sqrt{3})}$

$(g^{-1})'(0)=\dfrac{1}{\frac{2}{3}}=\dfrac{3}{2}$

Exercice 3

1) $f'(x)=\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\dfrac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}<0,\ \forall x\in]0,+\infty[$

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	1

2/ a) Soit $g(x)=(f\circ\tan)(x)$; $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$ g est la composée de deux fonctions dérivables : $x\mapsto \tan x$ dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et $x\mapsto f(x)$ est dérivable sur $\tan(]0,\frac{\pi}{2}[)=]0,+\infty[$ d'où g est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et on a :

$$g'(x)=f'(\tan x)\times(\tan)'(x)$$

on a : $(\tan)'(x)=1+\tan^2 x$ et $f'(\tan x)=\dfrac{-1}{2\tan^2 x\sqrt{1+\frac{1}{\tan x}}}$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{-1}{2\tan^2 x\sqrt{\frac{1+\tan x}{\tan x}}}\times(1+\tan^2 x)$$

$$=\frac{-(1+\tan^2 x)\times\sqrt{\tan x}}{2\tan^2 x\sqrt{1+\tan x}}\ ;\ \forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[$$

$g'(x)<0$; $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[$

011

b) on a : $g'(x)<0$; $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[$; g est continue sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

donc g réalise une bijection de $]0,\frac{\pi}{2}[$ sur $g(]0,\frac{\pi}{2}[)$

Soit $g :]0,\frac{\pi}{2}[\longrightarrow]1,+\infty[$

c) g est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et $g'(x)\neq 0$ $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[$

donc g^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$ et on a

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{-2\tan^2(g^{-1}(x))}{1+\tan^2(g^{-1}(x))} \times \frac{\sqrt{1+\tan^2(g^{-1}(x))}}{\sqrt{\tan(g^{-1}(x))}}$$

Soit $g^{-1}(x)=y \Longleftrightarrow g(y)=x=\sqrt{1+\frac{1}{\tan y}}$

$\Longrightarrow x^2 = 1+\frac{1}{\tan y} \Longrightarrow \tan y = \frac{1}{x^2-1} = \tan(g^{-1}(x))$

$$\Longrightarrow (g^{-1})'(x) = \frac{-2\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2} \times \sqrt{\frac{1+\frac{1}{x^2-1}}{\frac{1}{x^2-1}}}$$

$$\Longrightarrow g'(x) = \frac{-2}{(x^2-1)^2+1} \times \sqrt{x^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2+1} \; ; \forall x \in]1,+\infty[$$

3°)

a) $\forall x \in]0,+\infty[$; $h(x) = g^{-1}(\sqrt{1+\sqrt{x}}) + g^{-1}(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}})$

$\varphi : x \longmapsto \sqrt{1+\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

g^{-1} est dérivable sur $\varphi(]0,+\infty[) =]1,+\infty[$

$\Longrightarrow g^{-1}\circ\varphi$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$\psi : x \longmapsto \sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$; $\psi(]0,+\infty[) \subset]1,+\infty[$

donc $g^{-1}\circ\psi$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$h = g^{-1}\circ\varphi + g^{-1}\circ\psi$ somme de deux fonctions dérivables

012

Sur $]0,+\infty[$ donc h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a:

$$h'(x) = \frac{-2\sqrt{1+\sqrt{x}}}{(x+1)} \times \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}} + \frac{-2\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\left(\frac{1}{x}+1\right)} \times \frac{\frac{-1}{2x\sqrt{x}}}{2\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{x}\,(x+1)} + \frac{1}{2\sqrt{x}\,(x+1)} = 0,\ \forall x \in]0,+\infty[$$

b) $g^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$ car $tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ et $f(1) = \sqrt{2}$

$h'(x) = 0 \Longrightarrow h(x) = h(1);\ \forall x \in]0,+\infty[$

$h(x) = h(1) = g^{-1}(\sqrt{2}) + g^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2};\ \forall x \in]0,+\infty[$

Exercice 4

1°/ $\square$ $\square$ $\boxed{x}$

2°/ $\square$ $\boxed{x}$ $\square$

Exercice 5

1) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$; $x \in [0,+\infty[$ est continue donc f admet une primitive F qui s'annule en 0

2) $G(x) = F(tg^2 x)$; $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

a) $G = F \circ tg^2$; F et tg^2 sont dérivables respectivement sur $[0,+\infty[$ et $[0,\frac{\pi}{2}[$

on a : $tg([0,\frac{\pi}{2}[) \subset [0,+\infty[$ donc G est la composée de deux fonctions dérivables donc G est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$

et on a $G'(x) = F'(tg^2(x)) \times (tg^2)'(x)$

$G'(x) = f(tg^2 x) \times (1+tg^2 x) \times 2 tg\, x$

⑤

013

$G'(x) = \frac{\sqrt{tg^2 x}}{\cancel{tg^2 x + 1}} \times 2 tg x \times (\cancel{tg^2 x + 1}) = tg x \times 2 tg x = 2 tg^2 x$

Car $\sqrt{tg^2 x} = |tg x| = tg x > 0, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

b) on a: $G'(x) = 2 tg^2 x \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$G'(x) = 2(1 + tg^2 x) - 2, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$\Longrightarrow G(x) = 2 tg x - 2x + k \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

on a: $G(0) = F(0) = 0$ donc $k = 0$

$\Longrightarrow G(x) = 2 tg x - 2x \; ; \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

c) $G(x) = F(tg^2 x) = 2 tg x - 2x, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

* $x = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow F(1) = 2 tg \frac{\pi}{4} - 2 \times \frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{2}$

* $x = \frac{\pi}{6} \Longrightarrow F(\frac{1}{3}) = 2 tg(\frac{\pi}{6}) - 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}$

Exercice 6

$f(x) = x^2 - \sqrt{1 - x^2} \; ; x \in [-1, 1]$

1°/ a) f est continue sur $[-1, 1]$ donc f admet une primitive sur $[-1, 1]$

b) $G'(x) = F'(x) - F'(-x)$

$= (x^2 - \sqrt{1 - x^2}) - (x^2 - \sqrt{1 - x^2}) = 0$

donc $G(x) = G(0) = 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$

$\Longrightarrow F(x) + F(-x) = 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$

$\Longrightarrow F$ est impaire

2) a) $H(x) = F(\cos x) - F(\sin x) \; ; x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

F; $\cos x$ et sinus sont respectivement dérivable sur $[-1, 1]$ et $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\cos([0, \frac{\pi}{2}]) \subset [-1, 1]$

et $\sin([0, \frac{\pi}{2}]) \subset [-1, 1]$.

014

donc H est la Composées des fonctions derivables d'où H est dérivables sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

et $H'(x) = F'(\cos x) \times (-\sin x) - F'(\sin x) \cos x$

$= f(\cos x) \times (\sin x) \quad f(\sin x) \times \cos x$

$= (\cos^2 x - \sqrt{1-\cos^2 x}) \times (-\sin x) - \sin^2 x - \sqrt{1-\sin^2 x} \times \cos x$

$= (\cos^2 x - \sin x) \times (-\sin x) - (\sin^2 x - \cos x) \cos x$

$= -\sin x \cos^2 x + \sin^2 x - \sin^2 x \cos x + \cos^2 x$

$= 1 - \sin x \cos^2 x - \cos x \sin^2 x \; ; \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$(\sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = \sin x \geq 0$ et $\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} - \cos x \geq 0$

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}])$

b) on a

$H'(x) = 1 - \sin x \cos^2 x - \cos x \sin^2 x \; ; \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

donc $H(x) = x + \frac{1}{3} \cos^3 x - \frac{1}{3} \sin^3 x + k$

$H(\frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow k = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow H(x) = x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \cos^3 x - \frac{1}{3} \sin^3 x$

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$x = 0$

$H(0) = F(1) = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$

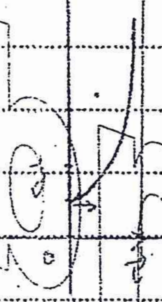
Exercice 4

$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} \; ; x \in [0, 1]$

1) $f'(x) = \frac{+x}{(1+\sqrt{1-x^2})^2 \times \sqrt{1-x^2}} \geq 0$

x	0		1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

015



2) $G(x)=F(\sin x)$; $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

a) F est dérivable sur $[0,1]$

$x\mapsto \sin x$ est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$; $\sin([0,\frac{\pi}{2}])\subset[0,1]$

donc G est la composée de deux fonctions dérivables

donc G est dérivables sur $[0,\frac{\pi}{2}]$

et on a $G'(x)=F'(\sin x)\times\cos x$

$=\frac{1}{1+\sqrt{1-\sin^2 x}}\times\cos x$; $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$G'(x)=\frac{\cos x}{1+\cos x}=1-\frac{1}{1+\cos x}=1-\frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}$

b) $G'(x)=1-\frac{1}{2}(1+tg^2(\frac{x}{2}))$ $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

donc $G(x)=x-tg(\frac{x}{2})+k$, $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$G(0)=0 \Rightarrow k=0 \Rightarrow G(x)=x-tg\frac{x}{2}$

c) $x=\frac{\pi}{2}$

$G(\frac{\pi}{2})=F(1)=\frac{\pi}{2}-tg(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}-1$