

Lycée Pilote Sfax

A/S : 2016-2017

Série N°33
(Fonctions logarithme népérien)

4^{ème} Math

Mr Jellali

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x \ln(x)}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. a. Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ et que

$$f'(x) = \frac{-(\ln^2(x) + \ln(x) + 1)}{(x \ln(x))^2}.$$

b. Dresser le tableau de variation de f .

3. Déterminer le point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

4. Tracer C_f .

5. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations

$$x = \frac{1}{e} \text{ et } x = \frac{1}{e^2}.$$

6. Soit g la fonction définie sur $]0, 1[$ par $g(x) = \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

On désigne par C_g la courbe de g dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) - g(x) = \frac{-1}{x \ln(x)}$.

b. Soit $x \in]0, 1[$, on désigne par M et N les points respectifs de C_f et C_g de même abscisse x .

Déterminer la position des points M et N pour que la distance MN soit minimale.

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C) désigne la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) On pose pour $x > 0$ $g(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - x + \frac{1}{2}$.

a) Vérifier que $g(x) = x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{1+t} - 1 + t\right) dt$.

b) Montrer que pour tout $t \geq 0$ on a : $0 \leq \frac{1}{1+t} - 1 + t \leq t^2$.

c) En déduire que $x - \frac{1}{2} \leq f(x) \leq x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x}$ pour tout $x > 0$.

d) Calculer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et prouver que la droite $D: y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à (C).

2)a) Montrer que $\forall x > 0$; $2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$. Déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f et tracer (C).

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

- a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- b) Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 4) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(x) = \int_1^x f(t) dt$.
- a) Montrer que h est continue à droite en 0.
- b) Montrer que $\forall x > 0 ; h(x) = \frac{1}{3} \left((x^3 + 1) \ln(x+1) - x^3 \ln x + \frac{1}{2} x^2 - x + \frac{1}{2} - 2 \ln 2 \right)$.
- c) En déduire la valeur de $J = \int_0^1 f(t) dt$.
- d) Calculer alors l'aire de la région du plan limitée par (C) et (C') et les droites d'équations : $x=1$ et $y=1$.

www.BAC.org.tn

Série N° 33

1/33

Exercice 1.

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x \ln x}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{x \ln x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 + \ln x}{x \ln x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln x} + \frac{1}{x} = 0.$$

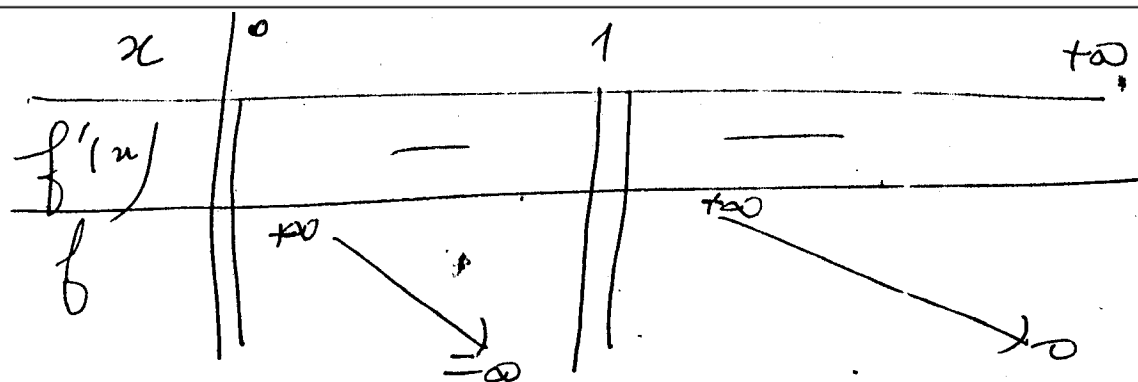
2/a) $\begin{cases} x \mapsto 1 + \ln x \text{ et } \ln x \text{ sont continus sur }]0, 1[\text{ et }]1, +\infty[\\ x \mapsto x \ln x \text{ et } \ln x \text{ ne sont pas continus sur }]0, 1[\text{ et }]1, +\infty[\end{cases}$

alors

$$\text{et } \forall x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}; f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x \ln x) - (1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x})(1 + \ln x)}{(x \ln x)^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\ln x - (\ln x + 1)^2}{(x \ln x)^2} = \frac{-(\ln^2 x + \ln x + 1)}{(x \ln x)^2} \\ &= \frac{-\left(\left(\ln x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)}{(x \ln x)^2} < 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &X^2 + X + 1 \\ &= \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 \\ &= \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

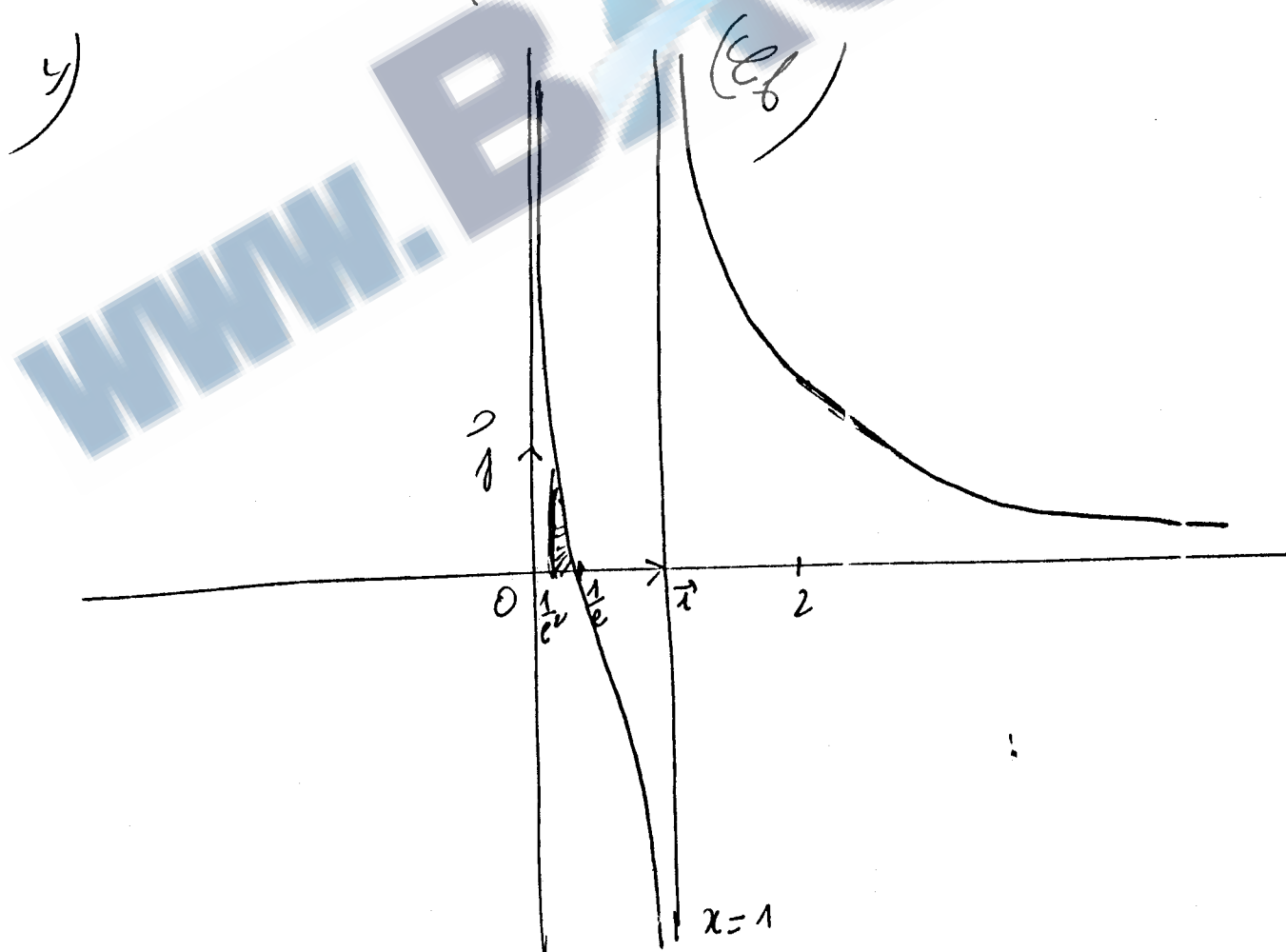


3) Soit $x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$:
 $f(x) = 0$ éfä $1 + \ln x = 0$

éä $\ln x = -1$
 éä $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

ainsi : $\mathcal{C}_f \cap (0, \frac{1}{e}) = \{ A(\frac{1}{e}, 0) \}$.

$\ln x = 1$ éä $x = e$
 $\ln x = -1$ éä $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$
 * $\ln x = n$ éä $x = e^n$
 $n \in \mathbb{Z}$



$$\text{al } A = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} f(u) du$$

$$= \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{u \ln u} + \frac{1}{u} du$$

$$\frac{U'}{U} \rightarrow \ln |U|$$

$$= \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{\ln u} + \frac{1}{u} du$$

$$= \left[\ln |\ln u| + \ln u \right]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}$$

$$= \ln \left| \ln \left(\frac{1}{e} \right) \right| + \ln \left(\frac{1}{e} \right) - \ln \left| \ln \left(\frac{1}{e^2} \right) \right| - \ln \left(\frac{1}{e^2} \right)$$

$$= \ln \frac{1}{e} + (-1) - \ln 2 - (-2)$$

$$= 1 - \ln 2 \quad (\text{aa})$$

6/ a) Soit $x \in]0, 1[$.

$$f(x) - g(x) = \frac{1 + \ln x}{x \ln x} - \frac{\frac{1 + \ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x} \ln(\sqrt{x})}}{\frac{(\sqrt{x})}{1 + \frac{1}{2} \ln x}}$$

$$= \frac{1 + \ln x}{x \ln x} - \frac{1 + \frac{1}{2} \ln x}{x \cdot \frac{1}{2} \ln x}$$

$$= \frac{1 + \ln x}{x \ln x} - \frac{2 + \ln x}{x \ln x} = \frac{-1}{x \ln x}$$

4/33

Exercice 2

15/3

1) a) Soit $x > 0$; alors $\frac{1}{x} > 0$.

$$x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t} - 1+t dt = x^2 \left[\ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{x}}$$

$$= x^2 \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} \right)$$

car $1+t > 0$
 $\forall t \in (0, \frac{1}{x})$

$$= x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - x + \frac{1}{2}$$

$$= g(x).$$

b) Soit $t \geq 0$;

$$\frac{1}{1+t} - 1+t = \frac{1-(t+1)(t-1)}{1+t}$$

$$= \frac{t^2}{1+t} \geq 0$$

$1+t \geq 1$

$$\frac{1}{1+t} \leq 1 \text{ d'où } \frac{t^2}{1+t} \leq t^2$$

ainsi $0 \leq \frac{1}{1+t} - 1+t \leq t^2$

c) Soit $x > 0$; alors $\frac{1}{x} > 0$.

pour t tel que $0 \leq t \leq \frac{1}{x}$

on a : $0 \leq \frac{1}{1+t} - 1+t \leq t^2$

Soit $f: t \mapsto \frac{1}{1+t} - 1+t$ et $t \mapsto t^2$ sur $\left(0, \frac{1}{n}\right]$ 6/33

alors $0 \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{1+t} - 1+t \right) dt \leq \int_0^{\frac{1}{n}} t^2 dt$

$0 \leq g(u) \leq x^2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{n}} \Rightarrow x^2 \geq 0$

$0 \leq g(u) \leq x^2 \cdot \frac{1}{3x^3}$

alors $0 \leq g(u) \leq \frac{1}{3x}$

alors $0 \leq f(u) - x + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{3x}$

alors $x - \frac{1}{2} \leq f(u) \leq x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x}$

d) x on a: $\forall x > 0$; $f(u) \geq x - \frac{1}{2}$

le plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{2} = +\infty$

alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(u) = +\infty$

$0 \leq f(u) - (x - \frac{1}{2}) \leq \frac{1}{3x}$

x on a: $\forall x > 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3x} \right) = 0$

alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(u) - (x - \frac{1}{2}) = 0$

alors la droite: $y = x - \frac{1}{2}$

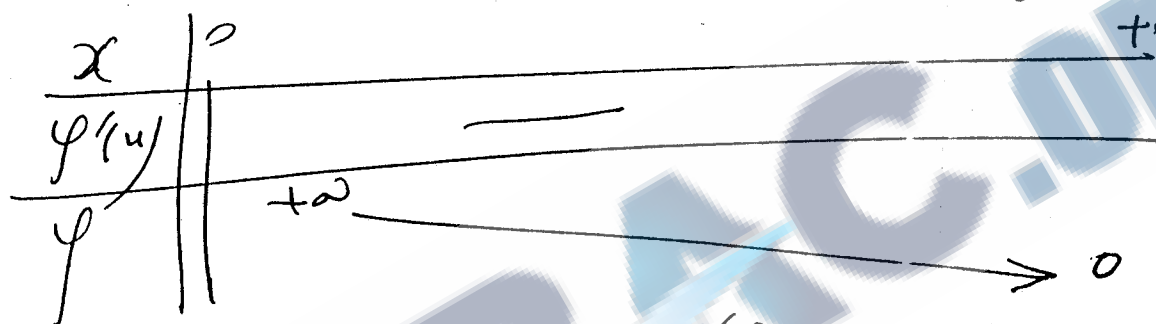
6

4) a) On pose $\varphi(x) = 2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ 17/3
 $\forall x > 0$.

$$\varphi'(x) = 2 \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-2}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-2x - 2 + x}{x(x+1)^2} = \frac{-(x+2)}{x(x+1)^2} < 0$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

$$= 0$$

φ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$; $\varphi(0) = 0$; $\varphi'(x) < 0$; $\varphi(+\infty) = +\infty$

donc $\forall x \in]0, +\infty[; \varphi(x) > 0$

$$\underline{\underline{\text{donc}}} \quad 2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$$

* $f'(x) = 2x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x^2 \left(\frac{-1}{x(x+1)}\right)$ (3)

$$= 2x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{x}{x+1}$$

$$= x \left(2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right)$$

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

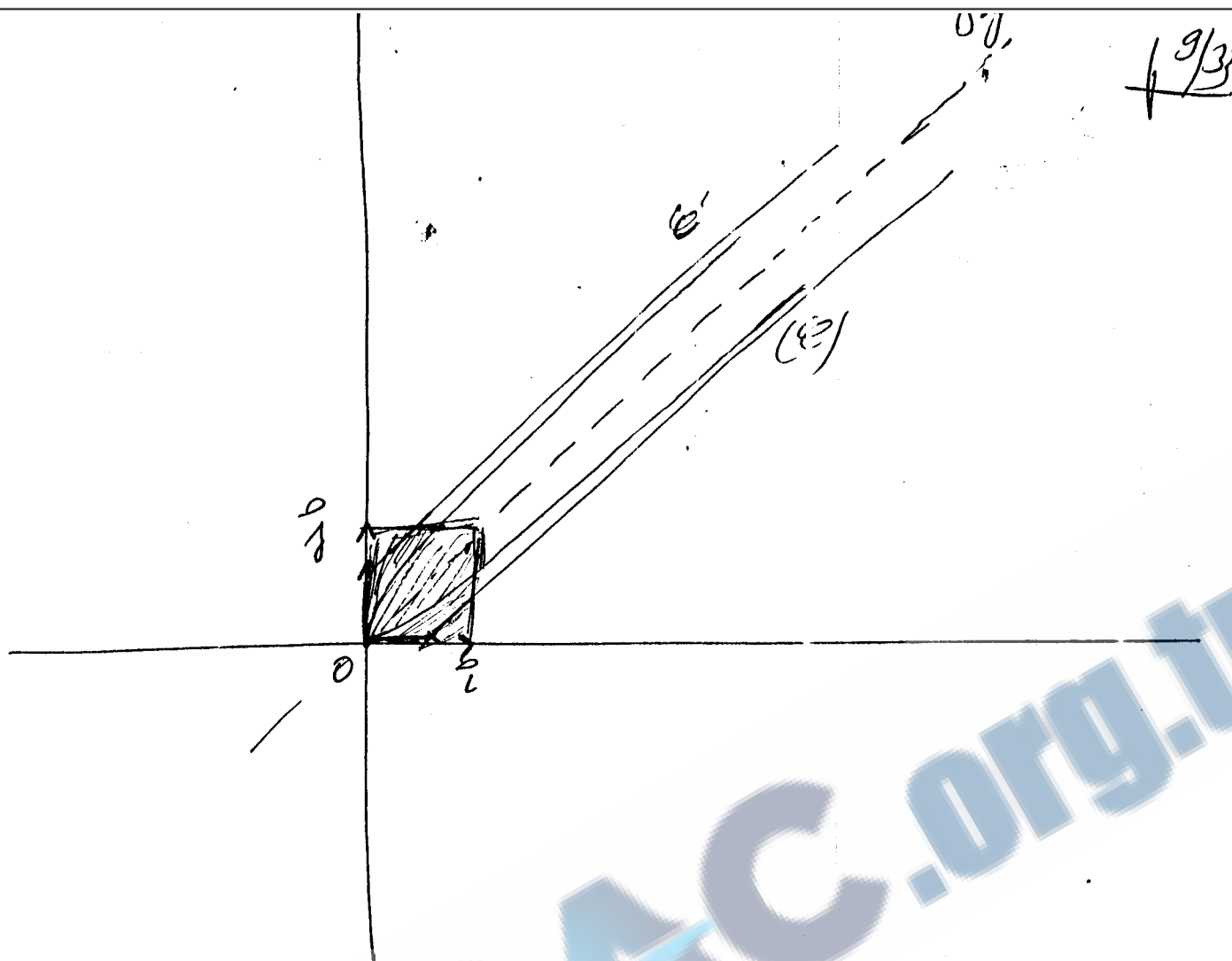
$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(x+1) - \frac{x \ln x}{0}}{0}$$

$$= 0$$

ah f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

c)

x	P	Q
$f'(x)$	0	+
f	0	$+\infty$



3) a) - - -
b) - - -

4) a) $\left\{ \begin{array}{l} t \mapsto f(t) \text{ continue sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } f \text{ admet une limite en } 0. \\ t \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right.$

admet une limite en 0 et en fait a est en 0 .

$$\begin{aligned} \text{b) Soit } x > 0, \quad h(x) &= \int_1^x f(t) dt \\ &= \int_1^x t^2 h\left(\frac{t+1}{t}\right) dt \end{aligned}$$

on pose
$$\begin{cases} U(t) = \ln\left(\frac{t+1}{t}\right) \\ V'(t) = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(t) = \frac{1}{t(t+1)} \\ V(t) = \frac{t^3}{3} \end{cases} \quad \sqrt{10/33}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= \left[\frac{t^3}{3} \ln\left(\frac{t+1}{t}\right) \right]_1^x + \frac{1}{3} \int_1^x \frac{t^2}{1+t} dt \\ &= \frac{x^3}{3} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \int_1^x \frac{(t^2-1)+1}{1+t} dt \\ &= \frac{1}{3} \left(x^3 \ln(x+1) - x^3 \ln x - \ln 2 + \int_1^x \left(t - 1 + \frac{1}{1+t} \right) dt \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(x^3 \ln(x+1) - x^3 \ln x - \ln 2 + \left[\frac{t^2}{2} - t + \ln(1+t) \right]_1^x \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(x^3 \ln(x+1) - x^3 \ln x - \ln 2 + \frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x) + \frac{1}{2} - \ln 2 \right) \\ &= \frac{1}{3} \left((x^3+1) \ln(x+1) - x^3 \ln x + \frac{1}{2} x^2 - x + \frac{1}{2} - 2 \ln 2 \right) \end{aligned}$$

c) $h(t)$ est continue $\Rightarrow$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0)$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3} \left((x^3+1) \ln(x+1) - \frac{x^3 \ln x}{0} + \frac{\frac{1}{2} x^2 - x + \frac{1}{2} - 2 \ln 2}{0} \right) = \int_1^0 \frac{1}{1+t} dt$

$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - 2 \ln 2 \right) = - \int_1^0 \frac{1}{1+t} dt = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{6}$

d) fonction affine $z(x, y)$
 est l'aire de la partie du plan limitée
 par C , l'axe des ordonnées et la droite $x=1$
 soit A l'aire — — — — —

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 2 \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{2}{1} y \right)_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \int_0^1 (1-x) dx \\ &= \frac{1}{2} (1-x)^2 \Big|_{x=0}^{x=1} \end{aligned}$$

Lycée Pilote Sfax

A/S : 2016-2017

Série N°2

(Fonctions logarithme népérien)

4^{ème} Math

Mr Jellali

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n} - \ln(1+x)$.

Soit (C_n) la représentation graphique de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f_1 . Montrer que l'équation $f_1(x) = 0$ admet dans $]-1, +\infty[$ une solution unique α et que $0 < \alpha < 1$.

b) Tracer la courbe (C_1) de f_1 .

c) Calculer l'aire de la partie limitée par (C_1) et les droites d'équations : $y = 0$; $x = 1$ et $x = e - 1$.

2) a) Etudier les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}) suivant la parité de n .

b) Soit A_n l'aire de la partie du plan limitée par (C_n) , (C_{n+1}) et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

Montrer que $0 \leq A_n \leq \frac{1}{n+1}$ puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]-1, 1[$ par $f(x) = -x + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variation de f et tracer C_f .

2. a. Montrer que pour tout réel x de $]0, +\infty[$, $\ln(x) \leq x - 1$.

b. En déduire que pour tout réel x de $]0, +\infty[$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $\ln(x) \leq \frac{x}{k} - 1 + \ln(k)$.

c. Montrer alors que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq \ln(k)$.

d. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq \ln(n!)$.

e. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\ln(n!) \geq \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - n + n(\sqrt{2})$.

3. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n$.

a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n \geq \ln(\sqrt{2})$.

b. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n - u_{n+1} = (2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variation de f .

2. Dans l'annexe, on a représenté la courbe Γ de la fonction $x \mapsto \ln x$. Construire le point de C_f d'abscisse $\frac{1}{e}$.

3. Soit u la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x) = x \ln^2(x) - 1$.

a. Dresser le tableau de variation de la fonction u .

b. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α et que $2 < \alpha < 2.1$.

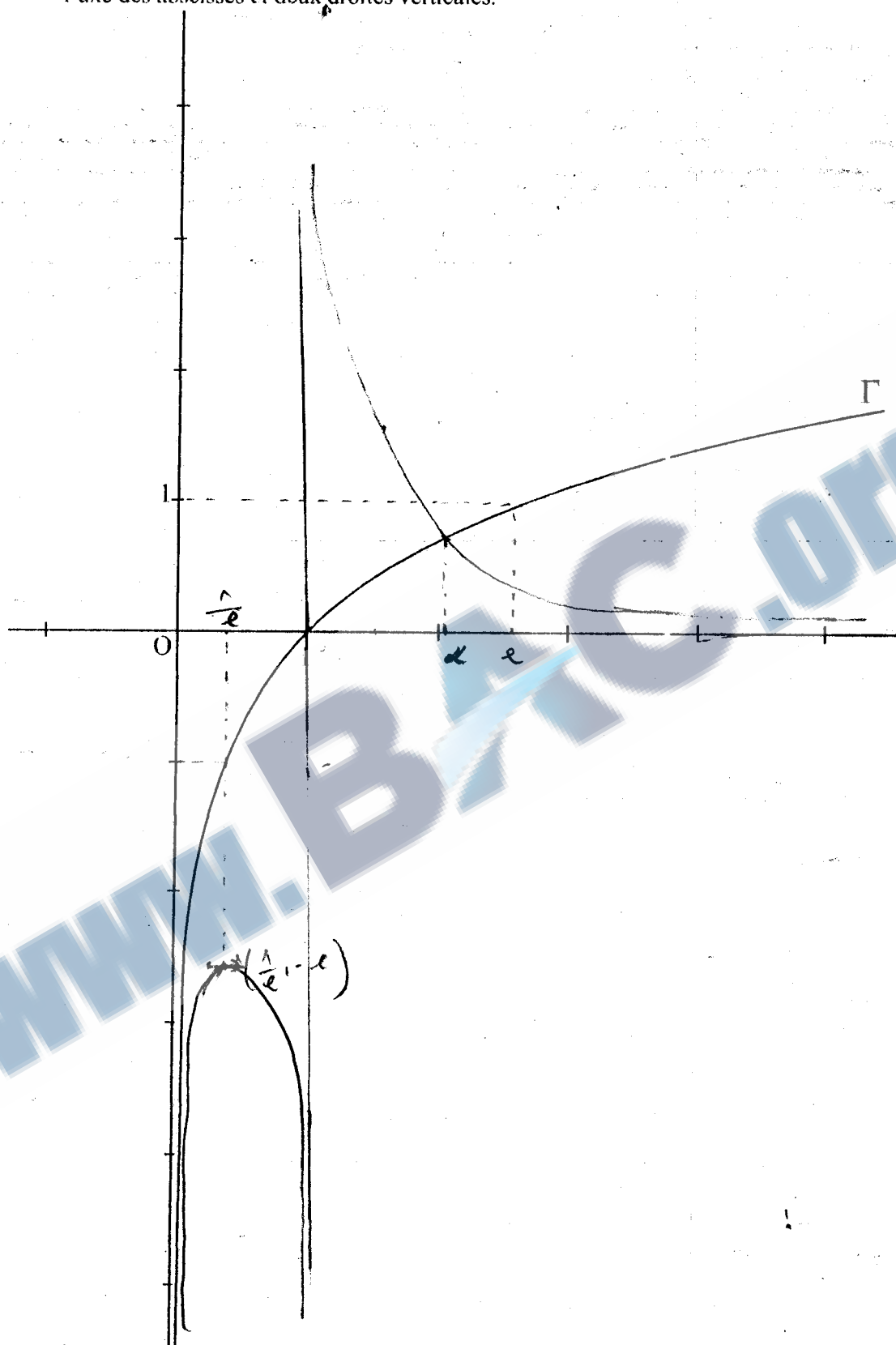
www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

5. Soit $a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$.

a. Calculer $\int_a^{a^2} f(x) dx$.

b. Hachurer, dans l'annexe (II), deux parties du plan de même aire, dont chacune est limitée par C_f , l'axe des abscisses et deux droites verticales.



Série N°34

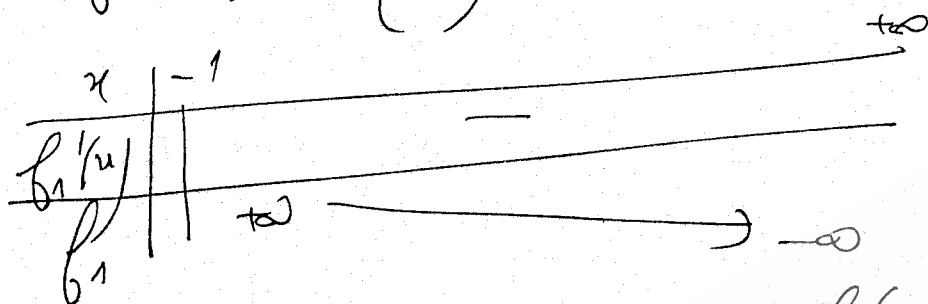
pg 1/34

Exercice.1

$$1) a) f_1(x) = \frac{1}{1+x} - \ln(1+x)$$

 $f_1 \text{ est dérivable sur }]-1, +\infty[\text{ (car } \forall x \in]-1, +\infty[$

$$f_1'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} < 0.$$



$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{1+x} - \ln(1+x) \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) = -\infty$$

car $x+1=x$
 Si $x \rightarrow +\infty$
 $x \rightarrow +\infty$

* f_1 est continue de $]-1, +\infty[$ car elle réalise une bijection

$$\text{de }]-1, +\infty[\text{ sur } f_1(]-1, +\infty[) = \mathbb{R}$$

comme $0 \in \mathbb{R}$ alors il y a $f_1(x) = 0$ admet une solution unique.

$$f_1 \text{ est continue sur } [0, 1]$$

$$f_1(0) = 1 \text{ et } f_1(1) = 0,1 \text{ d'où } 0,1 < 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1+x)x} - \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1+x)x} - \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x} \right) \cdot \left(\frac{1+x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1+x)x} - \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

1 4/34

$$1+x^4 > 0 \quad f' > 0 \quad \underline{\underline{1.6}}$$

b) A function f_{n+1} satisfies $\mu(0, 1)$

$$= \int_0^1 -f(x) + f(x) dx \quad \text{for } f(x) = f(x) \leq 0$$

$$= \int_0^1 \frac{x^4 (1-x)}{(1+x^2)(1+x^4+1)} dx$$

1/ 34

1) f est définie sur]0, 1[et]1, +∞[

et pour tout $x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$

$$f'(x) = - \frac{\ln x + x \cdot \frac{1}{x}}{(x \ln x)^2} = - \frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2}$$

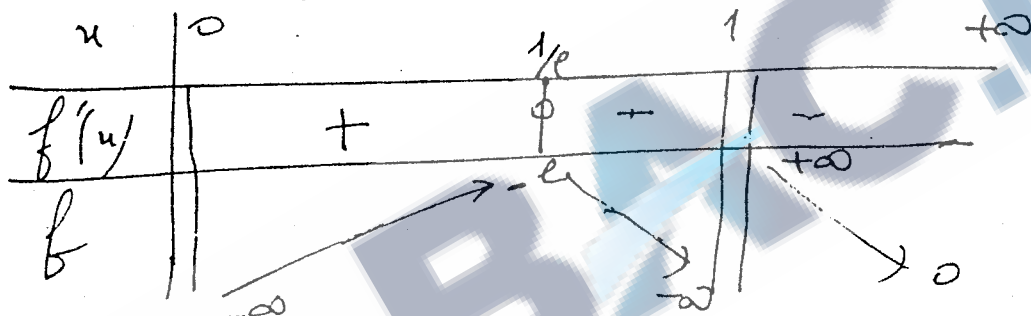
$$f'(x) = 0 \text{ éq à } \ln x = -1 \text{ éq à } x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\left. \begin{array}{l} \ln x = n, n \in \mathbb{Z} \\ \text{éq à } x = e^n \end{array} \right\}$$

$$f'(x) > 0 \text{ éq à } \ln x < -1$$

$$\text{éq à } x < e^{-1}$$

$$\text{éq à } x < \frac{1}{e}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x} = -\infty$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e}} = \frac{1}{-\frac{1}{e}} = -e$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x \ln x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = -e$$

$$h\left(\frac{1}{e}\right) = -1$$

$$h e = 1$$

Soit A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $\frac{1}{e}$.

$$3) \quad U \text{ de } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } [$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad U'(x) = \ln x + x \cdot 2 \cdot \frac{1}{x} \ln x$$

$$= \ln^2 x + 2 \ln x$$

$$= \ln x (\ln x + 2)$$

$$\ln x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -2$$

$$\Leftrightarrow x \geq e^{-2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e^2}$$

x	0	$\frac{1}{e^2}$	1	$+\infty$
$\ln x$		-	0	+
$\ln x + 2$		-	0	+
$U'(x)$	+	0	-	0
U	-	$\frac{4}{e^4} - 1$	-1	+

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} U(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 \left(\frac{x}{-1}\right) = -1$$

$$U\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2} \ln^2 \left(\frac{1}{e^2}\right) - 1$$

$$\ln(e^{-2}) = -2$$

$$= \frac{1}{e^2} \cdot 4 - 1 = \frac{4}{e^2} - 1 \approx -0,45$$

$$U(1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U = +\infty$$

$$e^{\frac{1}{e^2}}$$

13/

soit pour tout $x \in]0, 1[$, $U(x) < 0$

soit l'éq $U(x) = 0$ n'admet pas de sol dans $]0, 1[$.

* La restriction de U à $[1, +\infty[$ est continue et stricte

croissante $[1, +\infty[$ (al elle réalise une bij

de $[1, +\infty[$ sur $U([1, +\infty[) = [-1, +\infty[$

$0 \in [-1, +\infty[$ (al l'éq $U(x) = 0$ admet dans $[1, +\infty[$

un unique sol

autre l'éq $U(x) = 0$ — — — dans $]0, 1[$

* U est stricte $(2, 2, 1)$

$$U(2) =$$

$$\text{al } U(2) \times U(2, 1) < 0$$

$$U(2, 1) =$$

autre $2 < x < 2, 1$

c/ soit $x \in]0, +\infty[\setminus]0, 1[$.

$$f(x) - h_x = \frac{1}{x h_x} - h_x = \frac{1 - x(h_x)^2}{x h_x}$$

$$= \frac{-U(x)}{x h_x}$$

on a : pour tout $x \in]0, 1[$, $U(x) < 0$.

$$\text{al } -U(x) > 0$$

$$U(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad -U(\alpha) = 0$$

$$\text{Si } x > \alpha \quad \text{alors} \quad U(x) > U(\alpha) \quad \text{car } U \text{ est croissante sur }]\alpha, +\infty[$$

$$U(x) > 0$$

$$-U(x) < 0$$

$$\text{Si } 1 \leq x < \alpha$$

$$U(x) < U(\alpha) \quad \text{car}$$

$$U(x) < 0$$

$$-U(x) > 0$$

x	0	1	α	$+\infty$
$-U(x)$		+	+	0
$\ln x$		-	+	+
$f(x) - \ln x$		-	+	-
position de l'ext. P.		Ext. au dessus de (1)	Ext. au dessus de (1) I(α/ln α) pt. min.	Ext. au dessus de (1)

$$5) a) \int_a^{a^2} f(x) dx = \int_a^{a^2} \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$= \int_a^{a^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx$$

$$= \left[\ln |\ln x| \right]_a^{a^2}$$

$$= \ln |h(a)| - \ln |h(a)|$$

$$= \ln \left| \frac{h(a)}{h(a)} \right|$$

$$= \ln \left| \frac{2La}{La} \right|$$

$$= \ln |2| = \ln 2.$$

$$b) A_1 = \int_2^{2^2} f(u) du = \int_2^4 f(u) du = \ln 2.$$

$$A_2 = \int_{\sqrt{2}}^{(\sqrt{2})^2} f(u) du = \int_{\sqrt{2}}^2 f(u) du = \ln 2.$$

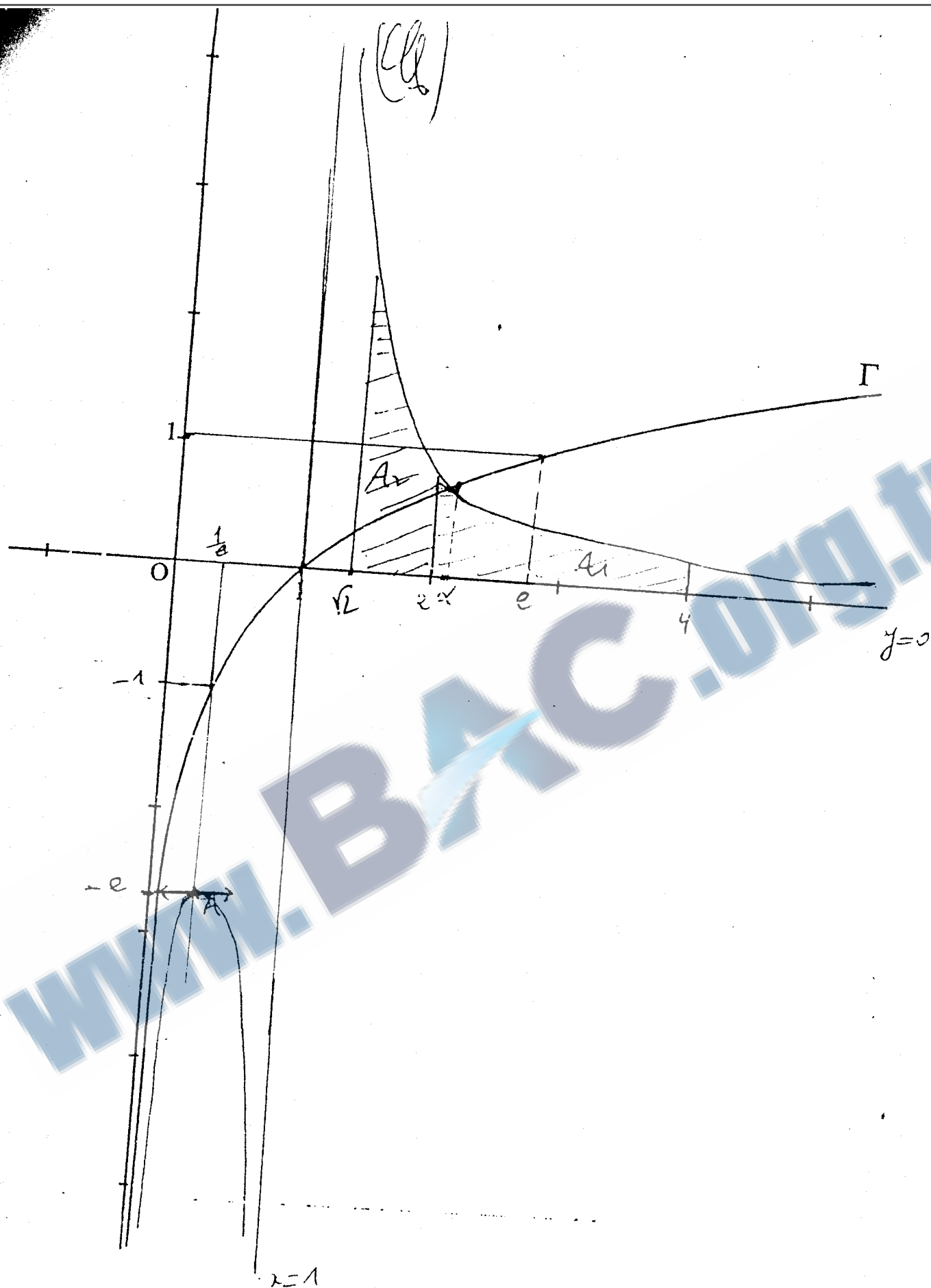
f est et positive sur $(2, 4]$ est l'aire de la partie du plan limitée par f et l'axe des absc et les ff: $u=2$ et $u=4$

$$\text{et } A_1 = \int_2^4 f(u) du = \ln 2.$$

$$A_2 = \int_{\sqrt{2}}^2 f(u) du = \ln 2.$$

$$\text{on a : } A_1 = A_2$$

++



$$0 \leq x \leq 1$$

$$-1 \leq -x \leq 0$$

$$0 \leq 1-x \leq 1$$

$$\begin{cases} 1+x^4 \geq 1 \\ 1+x^{4+1} \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{d} (1+x^4)(1+x^{4+1}) \geq 1$$

$$\text{d} 0 \leq \frac{1}{(1+x^4)(1+x^{4+1})} \leq 1$$

$$\text{d} 0 \leq \frac{1-x}{(1+x^4)(1+x^{4+1})} \leq 1$$

$$\text{d} 0 \leq \frac{(1-x)x^4}{(1+x^4)(1+x^{4+1})} \leq x^4 \text{ car } x^4 \geq 0$$

$$\text{f-c} \quad 0 \leq A_n \leq \int_0^1 x^4 dx$$

$$\text{d} 0 \leq A_n \leq \left(\frac{x^{4+1}}{4+1} \right)_0^1$$

$$\text{d} 0 \leq A_n \leq \frac{1}{4+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (0) = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4+1} = 0$$

$$\text{d} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$$

1) fct de $]-1,1[$ (et $x \in]-1,1[$)

$$f'(x) = \frac{x^2}{1-x^2} \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f = \lim_{x \rightarrow -1^+} -x + \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1-x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f = +\infty$$

2) a) On pose $f(x) = \ln x - x$, $x \in]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1-x}{x}$$

x	0	1	+	+	+
f'(x)	-	0	+	+	+
f	-	0	+	+	+

car f admet sur $]0, +\infty[$ un max égal à 0 en 1

ainsi $\forall x \in]0, +\infty[$, $\ln x \leq x - 1$.

b) Si $x \in]0, +\infty[$ et $k \in \mathbb{R}^*$,

$$\text{on a : } \frac{x}{k} \in]0, +\infty[\text{ et } \ln\left(\frac{x}{k}\right) \leq \frac{x}{k} - 1$$

$$\text{d'où } \ln x \leq \frac{x}{k} - 1 + \ln(k)$$

c) Si $k \in \mathbb{R}^*$, pour tout $x \in \left[\frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$

$$\text{on a : } \ln x \leq \frac{x}{k} - 1 + \ln(k)$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k+1}{2}} \ln x \, dx \leq \int_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k+1}{2}} \left(\frac{x}{k} - 1 + \ln(k) \right) dx$$

$$\text{d'où } \int_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k+1}{2}} \ln x \, dx \leq \left[\frac{x^2}{2k} - x + \ln(k)x \right]_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k+1}{2}}$$

$$\text{d'où } \int_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k+1}{2}} \ln x \, dx \leq \frac{(k+1)^2}{4k} - \frac{k+1}{2} + \ln(k) \frac{k+1}{2}$$

$$- \frac{(k-1)^2}{4k} + \frac{k-1}{2} - \ln(k) \frac{k-1}{2}$$

$$\text{d'où } \int_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k+1}{2}} \ln x \, dx \leq \frac{k}{2k} + \frac{1}{2k} - 1 + \frac{1}{2} \ln k + \frac{1}{2} \ln k$$

$$\text{d'où } \int_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k+1}{2}} \ln x \, dx \leq \ln k$$

d) Si $n \in \mathbb{N}^*$, et $k \in [1, n]$

$$\text{on a : } \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k+1}{2}} \ln x \, dx \leq \sum_{k=1}^n \ln k$$

$$\text{d'où } \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} \ln x \, dx \leq \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n$$

$$\text{d'où } \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} \ln x \, dx \leq \ln(n!)$$

$$e) \text{ Si } n \in \mathbb{N}^*, \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} \ln x \, dx = \left[x \ln x - x \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{n+1}{2}}$$

$$= \left(\frac{n+1}{2} \right) \ln \left(\frac{n+1}{2} \right) - \frac{n+1}{2} - \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{n+1}{2} \right) \ln \left(\frac{n+1}{2} \right) - \frac{n}{2} + \ln(2)$$

$$\text{d'après 2)c) on a d'où } \ln(n!) \geq \left(\frac{n+1}{2} \right) \ln \left(\frac{n+1}{2} \right) - \frac{n}{2} + \ln(2)$$

3) a) Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n!) \geq \left(\frac{n+1}{2} \right) \ln \left(\frac{n+1}{2} \right) - \frac{n}{2} + \ln(2)$

$$\text{d'où } \ln(n!) - \left(\frac{n+1}{2} \right) \ln \left(\frac{n+1}{2} \right) \geq -\frac{n}{2} + \ln(2)$$

$$\text{d'où } U_n \geq \left(\frac{n+1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right) + \ln(2) \geq \ln(2)$$

b) Si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n - U_{n+1} = \ln(n!) - \left(\frac{n+1}{2} \right) \ln \left(\frac{n+1}{2} \right) - \frac{n}{2} + \ln(2) - \left[\left(\frac{n+2}{2} \right) \ln \left(\frac{n+2}{2} \right) - \frac{n+1}{2} + \ln(2) \right]$$

$$U_n - U_{n+1} = \left(\frac{n!}{(n+1)!} \right) + \left(\frac{n+1}{2} \right) \ln \left(\frac{n+1}{2} \right) - \left(\frac{n+2}{2} \right) \ln \left(\frac{n+2}{2} \right) - 1$$

$$U_n - U_{n+1} = -\ln(n+1) + \left(\frac{n+1}{2} \right) \ln \left(\frac{n+1}{2} \right) + \left(\frac{n+2}{2} \right) \ln \left(\frac{n+2}{2} \right) - 1$$

$$= \left(\frac{n+1}{2} \right) \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - 1$$

$$\text{on a : } (2n+1) f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = (2n+1) \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \right)$$

$$= -1 + \left(\frac{n+1}{2} \right) \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)$$

$$\text{d'où : } U_n - U_{n+1} = (2n+1) f\left(\frac{1}{2n+1}\right) > 0$$

$$\text{d'où } (U_n) \text{ est décroissante}$$

$$\text{on a : } (U_n) \text{ est décroissante et majorée par } \ln(2)$$

$$\text{d'où } (U_n) \text{ est convergente.}$$