Lycée Pilote Sfax A/S : 2016-2017	Série N°21 (Similitudes)	4 ème Math Mr Jellali

Exercice 1

Dans le plan orienté, on considère un losange AOCΩ de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{A\Omega}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par B le symétrique de C par rapport à (AO).

1) Montrer que ABC est un triangle équilatéral et que O est le milieu de $[\Omega B]$.

2) Soit S la similitude directe qui transforme A en I et B en C.

a) Déterminer le rapport et une mesure de son angle.

b) Montrer que Ω est le centre de S.

c) Soit J le milieu de $[\Omega C]$. Montrer que S(O) = J.

3) Soit Δ la droite perpendiculaire à (OI) en B. Δ coupe (ΩC) en H et $(A\Omega)$ coupe (BC) en H'.

Montrer que S(Δ) = (BC). En déduire S(H) = H'.

4) Soit σ la similitude indirecte qui transforme B en C et C en I.

a) Déterminer le rapport et le centre de σ.

b) Montrer que l'axe de σ est la médiatrice de $[OC]$.

5) Soit M un point du plan . On pose $M_1 = S(M)$ et $M_2 = \sigma(M)$.

Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.

Exercice 2

Le plan est orienté dans le sens direct.

On considère un carré direct ABCD de centre O.

Soit P un point variable du segment $[BC]$ distinct de B.

On note Q le point d'intersection des droites (AP) et (CD) .

La perpendiculaire Δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

On désigne par r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. a. Déterminer l'image de la droite (BC) par r.

b. Montrer que les triangles ARQ et APS sont des triangles rectangles et isocèles.

2. On note N le milieu de $[PS]$ et M le milieu de $[QR]$.

Soit S la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a. Déterminer les images respectives de R et P par S.

b. Déterminer le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment $[BC]$ privé du point B.

c. Montrer que les points B, M, N et D sont alignés.

3. Soit $f = S\circ S_{(AB)}$.

a. Montrer que f est une similitude indirecte dont on précisera le rapport et le centre.

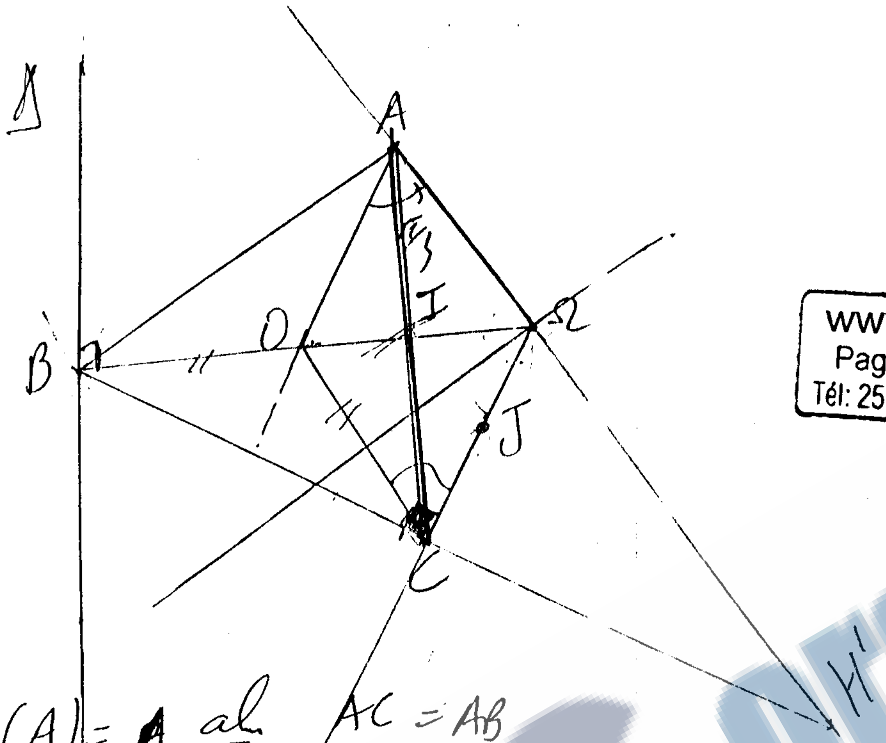
b. Construire l'axe de f.

Série N°21

1/21

Exercice 1

1)



$S_{(OA)}(A) = A$ alors $AC = AB$

$S_{(OA)}(C) = B$ et $(\widehat{\vec{AC}, \vec{AB}}) = 2(\widehat{\vec{AC}, \vec{AO}})[2\pi]$

$= \frac{\pi}{3}[2\pi]$

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

alors ABC est équilatéral.

$BA = BC$
$OA = OC$
$\Omega A = \Omega C$

alors B, O et $\Omega \in$ à la médiatrice de $[AC]$

alors B, O et Ω alignés

$S_{(OA)}(O) = O$ alors $OC = OB$

$S_{(OA)}(C) = B$ or $OC = O\Omega$ car $OC\Omega$ équil.

alors $OB = O\Omega$ alors $O = B * \Omega$.

2/21

2) a) $S(A)=I$, $S(B)=C$ } alors le rapport de S est $k=\frac{IC}{AB}=\frac{\frac{1}{2}AC}{AC}=\frac{1}{2}$

et l'angle de S est $\theta \equiv (\widehat{\vec{AB},\vec{IC}})\,(2\pi)$
$\equiv (\widehat{\vec{AB},\vec{AC}})\,(2\pi)$
$\equiv \frac{\pi}{3}\,(2\pi)$.

Si $\begin{cases} S(A)=B \\ IB=k\,IA \\ (\widehat{\vec{IA},\vec{IB}})\equiv\theta\,(2\pi) \end{cases}$ alors I est le centre de S

b) on a : $\begin{cases} S(A)=I \\ \frac{\Omega I}{\Omega A}=\frac{\frac{1}{2}\Omega O}{\Omega O}=\frac{1}{2} \quad \text{car } OA\Omega \text{ équil} \\ (\widehat{\vec{\Omega A},\vec{\Omega I}})\equiv\frac{\pi}{3}\,(2\pi) \end{cases}$

$\frac{\pi}{2}\neq\pi$

alors Ω est le centre de S.

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

d'où $S((\mathcal{C}_{\Omega})) = (\mathcal{A}_{\Omega})$

$H \in \Delta \cap (\mathcal{C}_{\Omega})$

d'où $S(H) \in S(\Delta) \cap S((\mathcal{C}_{\Omega}))$

d'où $S(H) \in (BC) \cap (\mathcal{A}_{\Omega})$ or $(BC) \cap (\mathcal{A}_{\Omega}) = \{H'\}$

d'où $S(H) = H'$

4) a) $\sigma(B) = C$

$\sigma(C) = I$

d'où le rapport de σ est $k' = \frac{CI}{BC} = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\sigma \circ \sigma = h_{(I, k^2)} \quad \sigma : S.I}$

Soit ω le centre de σ.

$\begin{cases} \sigma \circ \sigma = h(\omega, \frac{1}{4}) \\ \sigma \circ \sigma(B) = \sigma(C) = I \end{cases}$

d'où $h_{(\omega, \frac{1}{4})}(B) = I$

d'où $\vec{\omega I} = \frac{1}{4}\vec{\omega B}$ d'où $4\vec{\omega I} - \vec{\omega B} = \vec{0}$

d'où $\vec{\omega B} - 4\vec{\omega I} = \vec{0}$

d'où ω $\underbrace{\text{bary}}$ de $(B, 1)$ et $(I, -4)$

$\vec{\Omega B} - 4\vec{\Omega I} = 2\vec{\Omega O} - 4\vec{\Omega I}$
$= 2 \cdot 2\vec{\Omega I} - 4\vec{\Omega I} = \vec{0}$

3/21

c) $O = B * \Omega$

donc $S(O) = S(B) * S(\Omega)$

$= C * \Omega$

$= J$

3)

$\Delta \perp (B\Omega)$ en B

donc $S(\Delta) \perp S((B\Omega))$ en $S(B)$

donc $S(\Delta) \perp (C\Omega)$ en C

or $(BC) \perp (C\Omega)$ en C car $\begin{cases} (OA) \perp (BC) \quad \begin{pmatrix} OB = OC \\ AB = AC \end{pmatrix} \\ (OA) \parallel (C\Omega) \end{cases}$

donc $S(\Delta) = (BC)$

$(C\Omega) \parallel (OA)$ et passe par Ω

donc $S((C\Omega)) \parallel S((OA))$ et passe par $S(\Omega)$

donc $S((C\Omega)) \parallel (IJ)$ et passe par Ω

or $(A\Omega) \parallel (IJ)$ et passe par Ω car $\begin{cases} I = A * C \\ J = C * \Omega \end{cases}$

d'où Ω est le bary de $(B,1)$ et $(I,-4)$ 5/21
d'où $\Omega = \omega$

or Ω est le centre de σ

b/ $\begin{cases} \sigma(B) = C \\ \Omega \text{ centre de } \sigma \end{cases}$

d'où l'axe de σ est la dte qui porte la biss intérieure de $B\hat{\Omega}C$

de plus $O\Omega C$ est équilatéral

d'où l'axe de σ est la médiatrice de $[OC]$.

5) $M_1 = S(M)$

$M_2 = \sigma(M)$ ej $\boxed{M = \sigma^{-1}(M_2)}$

$M_1 = S(M)$

$M_1 = S \circ \sigma^{-1}(M_2)$

$S \circ \sigma^{-1}$ est la composée d'une S.D de rapport $\frac{1}{2}$

et d'une S.I de rapport 2

d'où $S\circ\sigma^{-1}$ est une S.I de rapport $\frac{1}{2}\times 2=1$ V21

d'où $S\circ\sigma^{-1}$ est un antidéplacement.

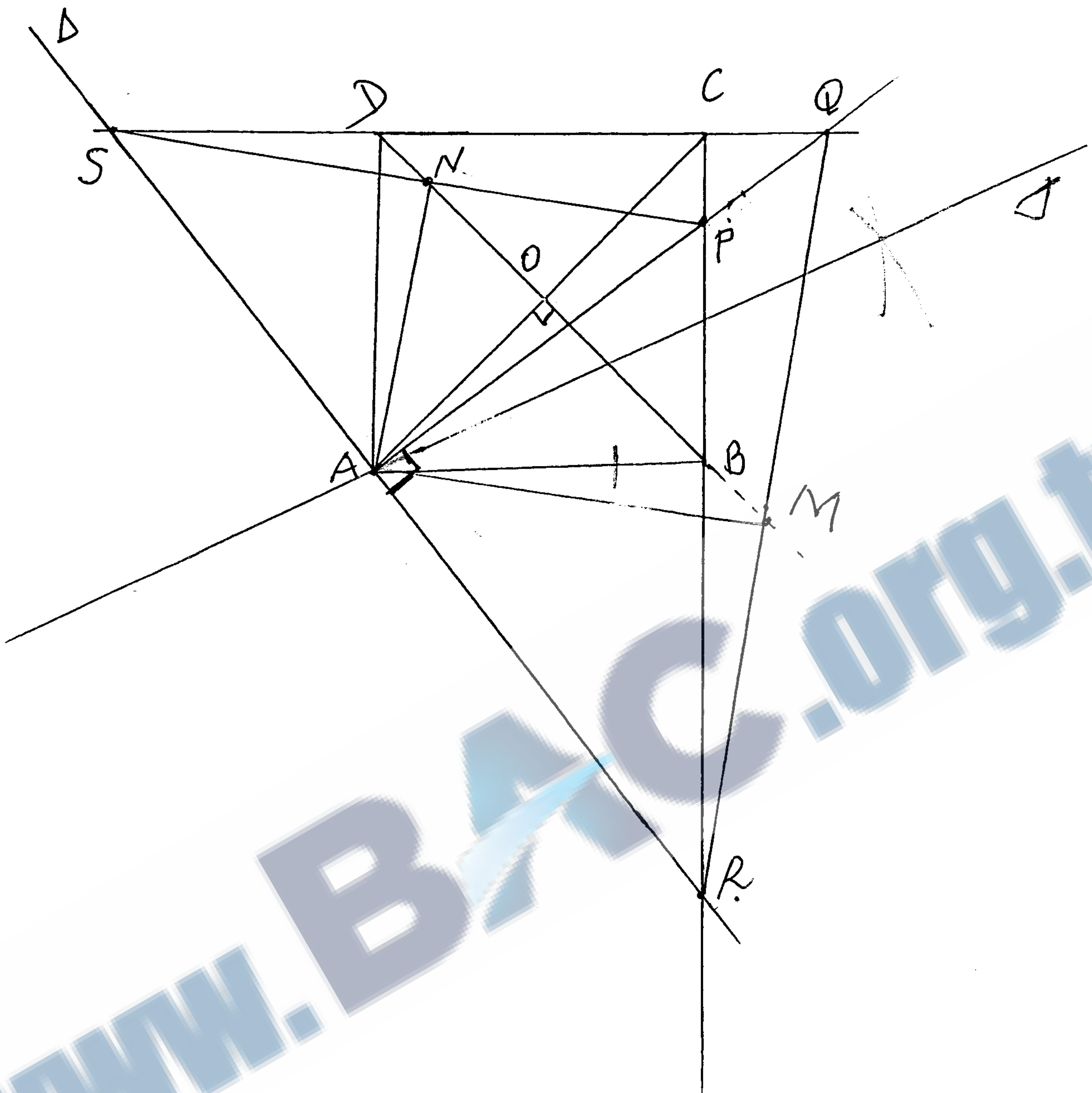
$$S\circ\sigma^{-1}(\Omega) = S(\Omega) = \Omega$$

$$S\circ\sigma^{-1}(C) = S(B) = C$$

$S\circ\sigma^{-1}$ est un antidéplacement qui fixe deux pts distincts Ω et C d'où $S\circ\sigma^{-1} = S_{(\Omega C)}$

ainsi M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à (ΩC).

Exercice 2



1) a) $r(B) = D$ car $\begin{cases} AB = AD \\ (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases}$

l'angle de R est $\frac{\pi}{2}$

alors $r((BC))$ est la dte qui passe par $r(B) = D$ et $\perp$ à (BC)

or (CD) passe par D et $\perp$ à (BC)

ainsi $r((BC)) = (CD)$

$R \in (BC) \cap \Delta$ $r(\Delta)$ est la droite qui passe par $r(A) = A$ et $\perp$ à Δ d'où $r(\Delta) = (AP)$

alors $r(R) \in r((BC)) \cap r(\Delta)$

d'où $r(R) \in (CD) \cap (AP)$

or $(CD) \cap (AP) = \{Q\}$ alors $r(R) = Q$

d'où $AR = AQ$ et $(\widehat{\vec{AR}, \vec{AQ}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

alors le triangle ARQ est rectangle isocèle en A.

* $P \in (BC) \cap (AP)$

alors $r(P) \in r((BC)) \cap r((AP))$

alors $r(P) \in (CD) \cap \Delta$ car $r((AP))$ est la droite qui passe par $r(A) = A$ et $\perp$ à (AP).

alors $r(P) = S$ car $(CD) \cap \Delta = \{S\}$

d'où $AP = AS$ et $(\widehat{\vec{AP}, \vec{AS}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

d'où APS est rectangle et isocèle en A.

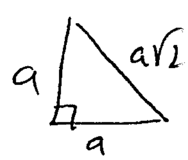
2) a) on a ARQ rectangle isocèle en A et $M = Q * R$.

$S = S_D(I, k, \theta)$.

Si $\begin{cases} \frac{IN}{IM} = k \\ (\widehat{\vec{IM}, \vec{IN}}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$ alors $S(M) = N$

d'où $\dfrac{AM}{AR} = \dfrac{\frac{1}{2} QR}{AR}$

$= \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} AR}{AR} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$(\widehat{\vec{AR}, \vec{AM}}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$. alors $S(R) = M$.

- - - - - . $S(P) = N$.

b) P décrit $[BC]$ privé de B

qd $S(P)$ décrit $S([BC])$ privé de $S(B)$.

on a: $S(P) = N$

on a: $\begin{cases} \dfrac{AO}{AB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ car } AOB \text{ rectangle isocèle en } O. \\ (\widehat{\vec{AB}, \vec{AO}}) \equiv \dfrac{\pi}{4} (2\pi) \end{cases}$

d'où $S(B) = O$.

on a: $\begin{cases} \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ car } ADC \text{ rectangle isocèle en } D. \\ (\widehat{\vec{AC}, \vec{AD}}) \equiv \dfrac{\pi}{4} (2\pi) \end{cases}$

d'où $S(C) = D$.

ainsi N décrit $[OD]$ privé de O.

c) on a: $N \in [OD]$ d'où N, O et D alignés.

$\begin{cases} S(R) = M \\ S(B) = O \\ S(C) = D \\ R, B \text{ et } C \text{ alignés} \end{cases}$ d'où M, O et D alignés

ainsi M, O, D et N alignés

10/21

3) a) f est la composée d'une S.D de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'une S.I de rapport 1.

alors f est une S.I de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases} f(A) = S \circ S_{(AB)}(A) = S(A) = A \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1 \end{cases}$$

alors A est le centre de f.

b) $f(B) = S \circ S_{(AB)}(B)$

$= S(B)$

$= O$

A centre de f

alors l'axe de f est la droite qui porte la bissectrice intérieure de $\widehat{BAO}$

Exercice 1

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $ABCD$ est un carré de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1) Soit S la similitude directe qui transforme B en C et O en D.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Montrer que A est le centre de S.

2) On suppose que le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

Soit σ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixes z' tel que $z' = \left(\frac{1-i}{2}\right)\bar{z} + \frac{1+3i}{2}$.

a) Montrer σ est une similitude indirecte de centre D.

b) Déterminer $\sigma(C)$ et construire l'axe Δ de σ.

3) Soit $\varphi = \sigma \circ S$. Déterminer $\varphi(B)$ et $\varphi(O)$. En déduire que φ est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

Exercice 2

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $AB = 2AD$.

On note I, J et K les milieux respectifs des segments [AB],[CD] et [JD].

1) Soit S la similitude directe telle que $S(B) = D$ et $S(C) = K$

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Soit Ω le centre de S. Trouver une construction géométrique de Ω.

c) Soit E le symétrique de B par rapport à C. Montrer que $\Omega E = 2\Omega J$ et que $(\Omega E) \perp (\Omega J)$.

2) On suppose dans cette question que $\left(A,\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AD}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan.

a) Déterminer la transformation complexe associée à S.

b) En déduire l'affixe du centre Ω de S.

3) Soit R la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose $h = R \circ S$.

a) Montrer que h est une homothétie dont on précisera le rapport.

b) Déterminer h(B),en déduire le centre de h.

4) Soit σ la similitude indirecte qui transforme D en B et K en C.

a) Déterminer le rapport de σ.

b) On pose $\varphi = h \circ \sigma$.

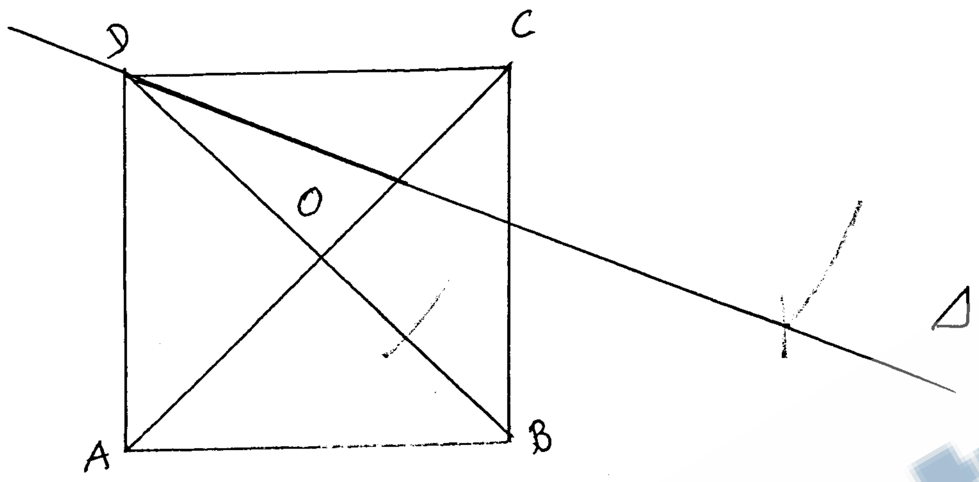
Déterminer $\varphi(D)$ et $\varphi(K)$.En déduire la nature et les éléments caractéristiques de φ.

c) Caractériser alors σ.

Série 22

1/22

Exercice 1



1) a) $S(B)=C$, $S(O)=D$ donc le rapport de S est $k=\frac{CD}{OB}=\frac{CD}{\frac{1}{2}DB}=\frac{CD}{\frac{\sqrt{2}CD}{2}}=\sqrt{2}$.

et l'angle de S est $\theta \equiv (\vec{BO},\vec{CD})[2\pi]$
$\equiv (\vec{BD},\vec{BA})[2\pi]$
$\equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) $S(B)=C$

$\frac{AC}{AB}=\sqrt{2}\neq 1$ car $ABCD$ est un carré

$(\vec{AB},\vec{AC})\equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

donc A est le centre de S.

2/22

2) L'écriture $z' = \left(\frac{1-i}{2}\right)\bar{z} + \frac{1+3i}{2}$ est de la forme

$z' = a\bar{z} + b$ avec $a = \frac{1-i}{2}$ et $b = \frac{1+3i}{2}$

$a \neq 0$ alors σ est une S.I de rapport $k' = |a| = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1$

alors le centre de σ est ω / $z_\omega = \dfrac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$

$$\boxed{\begin{aligned} z_\omega &= a\bar{z_\omega} + b \\ \bar{z_\omega} &= \bar{a}\, z_\omega + \bar{b} \\ z_\omega &= a\left(\bar{a}\, z_\omega + \bar{b}\right) + b \\ z_\omega &= a\bar{a}\, z_\omega + a\bar{b} + b \\ z_\omega(1-|a|^2) &= a\bar{b} + b \quad \text{d'où } z_\omega = \frac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2} \end{aligned}}$$

$$z_\omega = \frac{\left(\frac{1-i}{2}\right)\left(\overline{\frac{1+3i}{2}}\right) + \frac{1+3i}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{(1-i)(1-3i)}{4} + \frac{2+6i}{4}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\cancel{1} - 3i - i - \cancel{3} + \cancel{2} + 6i}{2} = \frac{2i}{2} = i = z_D$$

ainsi D est le centre de σ.

b) on a $\sigma(C) = C'$ alors $z_{C'} = \left(\frac{1-i}{2}\right)\bar{z_C} + \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = z_O$

ainsi $\underline{\sigma(C) = O}$.

* $\begin{cases} \sigma(C) = O \\ D \text{ centre de } \sigma \end{cases}$

alors l'axe de σ est la droite qui porte la bissectrice intérieure de $\widehat{COD}$

3) $\varphi(B) = \sigma \circ S(B) = \sigma(C) = O$

$\varphi(O) = \quad - \quad - \quad = D$

φ est la composée d'une S.I de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'une S.D de rapport $\sqrt{2}$

alors φ est une S.I de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1$

alors φ est un antidéplacement.

alors φ est soit une sym orthogonale soit une sym glissante.

$\varphi \circ \varphi(B) = \varphi(O) = D \neq B$ alors $\varphi \circ \varphi \neq Id_P$

alors φ n'est pas une sym orthogonale.

alors φ est une symétrie glissante d'axe $\mathcal{D}_1$ et de vecteur $\vec{u}_1$.

$\varphi \circ \varphi = t_{2\vec{u}_1}$ | alors $2\vec{u}_1 = \vec{BD}$

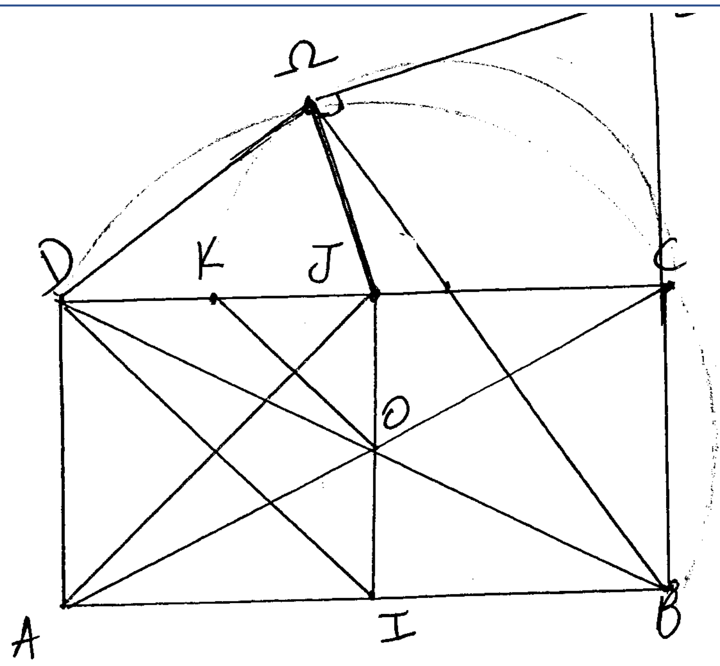
$\varphi \circ \varphi(B) = D$ | alors $\vec{u}_1 = \frac{1}{2}\vec{BD} = \vec{BO}$

$\varphi(B) = O$ alors $B * O = K_1 \in \mathcal{D}_1$

$\varphi(O) = D$ alors $O * D = K_2 \in \mathcal{D}_1$

alors $\mathcal{D}_1 = (K_1K_2)$

Exercice 2. 4/22



1) a) $\begin{cases} S(B)=D \\ S(C)=K \end{cases}$ alors le rapport de S est $k=\dfrac{DK}{BC}=\dfrac{\frac{1}{2}DJ}{BC}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot BC}{BC}=\dfrac{1}{2}$

et l'angle de S est $\theta \equiv (\widehat{\vec{BC},\vec{DK}})\ [2\pi]$
$\equiv (\widehat{\vec{BC},\vec{DC}})\ [2\pi]$
$\equiv (\widehat{\vec{CB},\vec{CD}})\ [2\pi]$
$\equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

b) $S(B)=D$ alors $(\widehat{\vec{\Omega B},\vec{\Omega D}})\equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
alors $\Omega \in$ à l'arc $\overset{\frown}{BD} \setminus \{B,D\}$ du cercle de diamètre $[BD]$.

$S(C)=K$ donc $(\widehat{\vec{\Omega C},\vec{\Omega K}})\equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
alors $\Omega \in$ à l'arc $\overset{\frown}{CK} \setminus \{C,K\}$ du cercle de diamètre $[CK]$.

ainsi $\{\Omega\} = \overset{\frown}{BD} \cap \overset{\frown}{CK} \setminus \{B,D,C,K\}$.

5/22

c) $C = E * B$

donc $S(C) = S(E) * S(B)$

donc $K = S(E) * D$

or $K = J * D$

alors $S(E) = J$

donc $\frac{\Omega J}{\Omega E} = \frac{1}{2}$ et $(\widehat{\vec{\Omega E}, \vec{\Omega J}}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

donc $\Omega E = 2\,\Omega J$ et $(\Omega E) \perp (\Omega J)$.

2/ a) $S : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$

$M(z) \longmapsto M'(z') \,/\, z' = az + b$

avec $a = ke^{i\theta} = \frac{1}{2}e^{i(-\frac{\pi}{2})} = -\frac{1}{2}i$ et $b \in \mathbb{C}$.

$z' = -\frac{1}{2}iz + b$.

$S(B) = D$; $z_D = -\frac{1}{2}i\,z_B + b$

; $i = -\frac{1}{2}i \cdot 2 + b$

; $\underline{\underline{b = 2i}}$

ainsi $z' = -\frac{1}{2}iz + 2i$

16/22

b) $|a| = k = \frac{1}{2} \neq 1$

$$\text{al } z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2i}{1+\frac{1}{2}i} = \frac{4i}{2+i}$$

$$= \frac{4i(2-i)}{5}$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{8}{5}i$$

3) a) $f = R \circ S$

h est la composée de deux S.D de rapports 1 et $\frac{1}{2}$

al h est une S.D de rapport $\frac{1}{2} \neq 1$ et d'angle $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(2\pi)$
$= 0\,(2\pi)$

(car l'angle de R est $\frac{\pi}{2}$ et l'angle de S est $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$)

alors h est une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$.

b) $h(B) = R \circ S(B) = R(D) = I$ car $\begin{cases} JD = JI \\ (\widehat{\vec{JD}, \vec{JI}}) = \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$

* Soit w le centre de h

$h(B) = I$; $\vec{wI} = \frac{1}{2}\vec{wB}$

; I milieu de [wB]

$w = S_I(B)$

alors $w = A$ car $S_I(B) = A$.

7/28

4) a) $\begin{cases} \sigma(D) = B \\ \sigma(K) = C \end{cases}$

alors le rapport de σ est $k' = \frac{BC}{DK} = 2$.

b) $\varphi(D) = h \circ \sigma(D) = h(B) = I$.

$\varphi(K) = h \circ \sigma(K) = h(C) = O$ car $\vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{AC}$.

$\varphi = h \circ \sigma$

φ est la composée d'une S. D de rapport $\frac{1}{2}$ et d'une S. I de rapport 2

alors φ est une S I de rapport $\frac{1}{2} \times 2 = 1$

alors φ est un antidéplacement.

$\varphi(D) = I$

$S_{(AJ)}(D) = I$ car $\begin{cases} (AJ) \text{ est la médiatrice de } [DI] \\ \text{car } AIJD \text{ est un carré.} \end{cases}$

alors $\varphi(D) = S_{(AJ)}(D)$

$\varphi(K) = O = S_{(AJ)}(K)$ car $\begin{cases} AIJD \text{ carré} \\ K = D * J \\ O = J * I \end{cases}$ alors $(AJ) = \text{méd} [KO]$

$S_{(AJ)}$ et φ sont deux antidéplacements qui coïncident sur deux points l'un et l'autre D et K alors $\varphi = S_{(AJ)}$

p8/22

c) $\varphi = h \circ \sigma$

j^{a} $S_{(AJ)} = h_{(A,\frac{1}{2})} \circ \sigma$

j^{a} $\sigma = h_{(A,2)} \circ S_{(AJ)}$

avec $A \in (AJ)$

<u>d</u>) σ est une S.I de centre A, de rapport 2 et d'axe (AJ)

Lycée Pilote Sfax A/S : 2016-2017	Série N°23 (Similitudes)	4^{eme} Math Mr Jellali

Exercice 1

Le plan est orienté dans le sens direct.

On considère un carré direct ABCD de centre O.

1. Soit f la similitude directe qui envoie D sur A et O sur B.
   a. Déterminer le rapport et l'angle de f.
   b. Montrer que C et le centre de f.
2. Soit I le symétrique de O par rapport à (AD) et R la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   On pose $g = t_{\overrightarrow{BA}} \circ f \circ R$.

   a. Déterminer $g(I)$ et $g(A)$.
   b. Montrer que g est une similitude directe dont on précisera le rapport et l'angle.
3. Soit Ω le centre de g.
   a. Montrer que Ω appartient au cercle circonscrit au triangle ADB.
   b. Caractériser $g \circ g$. En déduire que Ω appartient au cercle de diamètre $[ID]$.
   c. Construire alors Ω.
4. On pose $\sigma = g \circ S_{(AI)}$.
   a. Déterminer $\sigma(A)$ et $\sigma(I)$.
   b. Montrer que σ est une similitude indirecte dont on précisera le rapport et le centre.
   c. Construire l'axe de σ.

Exercice 2

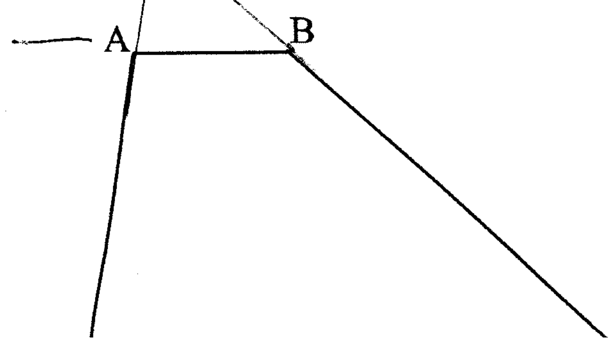
Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans l'annexe (I), ABCD est un trapèze non isocèle de bases $[AB]$ et $[DC]$.

On désigne par g la similitude indirecte qui transforme A en B et D en C.

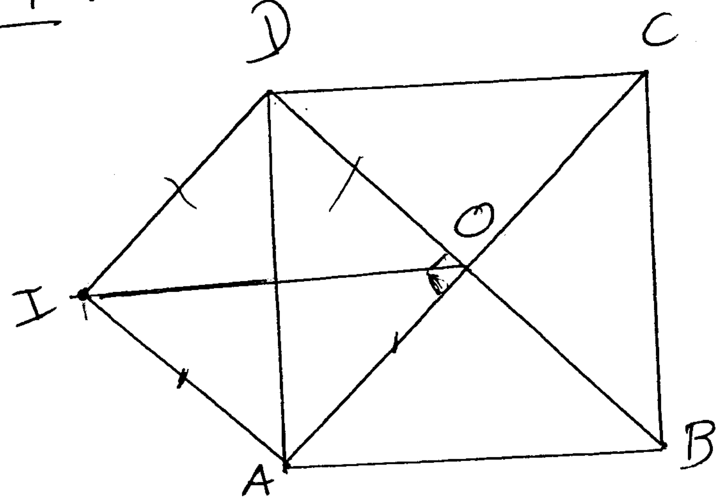
1. Soit Ω le point d'intersection de (AD) et (BC).

   Montrer que le point Ω est le centre de g.
2. On désigne par Δ l'axe de g. Construire Δ.
3. Soit A_1, B_1 et B' les points définis par $A_1 = S_\Delta(A)$, $B_1 = S_\Delta(B)$ et $B' = g(B)$.
   a. Montrer que les droites (A_1B_1) et (BB') sont parallèles.
   b. Construire le point B'.
4. On considère les points M_n tels que $M_0 = A$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = g(M_n)$.
   a. Déterminer les points M_1 et M_2.
   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \underbrace{g \circ g \circ \ldots \circ g}_{n \text{ fois}}(A)$.
   c. Montrer que si n est pair alors les points M_n appartiennent à la demi droite $[\Omega A)$.
   d. Montrer que si n est impair alors les points M_n appartiennent à la demi droite $[\Omega B)$.



Série 23

Exercice 1.



1)a) $f(D)=A$ alors le rapport de f est $k=\frac{AB}{OD}=\frac{AB}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}AB}=\sqrt{2}$

$f(O)=B$

et l'angle de f est $\theta\equiv(\vec{DO},\vec{AB})\,(2\pi)$

$\equiv(\vec{DB},\vec{AB})\,(2\pi)$

$\equiv(\vec{BD},\vec{BA})\,(2\pi)$

$\equiv\frac{\pi}{4}\,(2\pi)$

b) $f(D)=A$

$\frac{CA}{CD}=\frac{\sqrt{2}CD}{CD}=\sqrt{2}$ alors C est le centre de f

$(\vec{CD},\vec{CA})\equiv\frac{\pi}{4}\,(2\pi)$

$k\neq1$

2/23

2/ a/ $S_{(AD)}(O) = I$ | $S_{(AD)}(O) = I$
$S_{(AD)}(D) = D$ | $S_{(AD)}(A) = A$
d'où $OD = ID$ | d'où $OA = AI$

de plus $OD = OA$

d'où $OD = DI = AI = AO$

or $(OD) \perp (OA)$

ainsi $ODIA$ carré.

$g(I) = t_{\vec{BA}} \circ f \circ R(I)$

$= t_{\vec{BA}} \circ f(O)$ car $\begin{cases} DI = DO \\ (\vec{DI}, \vec{DO}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

$= t_{\vec{BA}}(B)$

$= A.$

$g(A) = t_{\vec{BA}} \circ f \circ R(A)$

$= t_{\vec{BA}} \circ f(C)$ car — —

$= t_{\vec{BA}}(C)$

$= D.$

b) $g = t_{\vec{BA}} \circ f \circ R$

g est la composée de 3 S.D de rapport resp 1, $\sqrt{2}$ et 1 l'angle de g est $\alpha = 0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$

$= \frac{3\pi}{4} \ (2\pi)$.

3) a)

Théorème :

Soit A, B, C et D quatre points tq A, B et C ne sont pas alignés.

Si $2(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) \equiv 2(\widehat{\vec{DB},\vec{DC}}) \ (2\pi)$

alors A, B, C et D appartiennent à un même cercle

$g(A) = D$

alors $(\widehat{\vec{\Omega A},\vec{\Omega D}}) \equiv \frac{3\pi}{4} \ (2\pi)$

alors $2(\widehat{\vec{\Omega A},\vec{\Omega D}}) \equiv \frac{6\pi}{4} \ (2\pi)$

$\equiv \frac{3\pi}{2} \ (2\pi)$

$\equiv -\frac{\pi}{2} \ (2\pi)$

or $2(\widehat{\vec{BA},\vec{BD}}) \equiv -\frac{\pi}{2} \ (2\pi)$

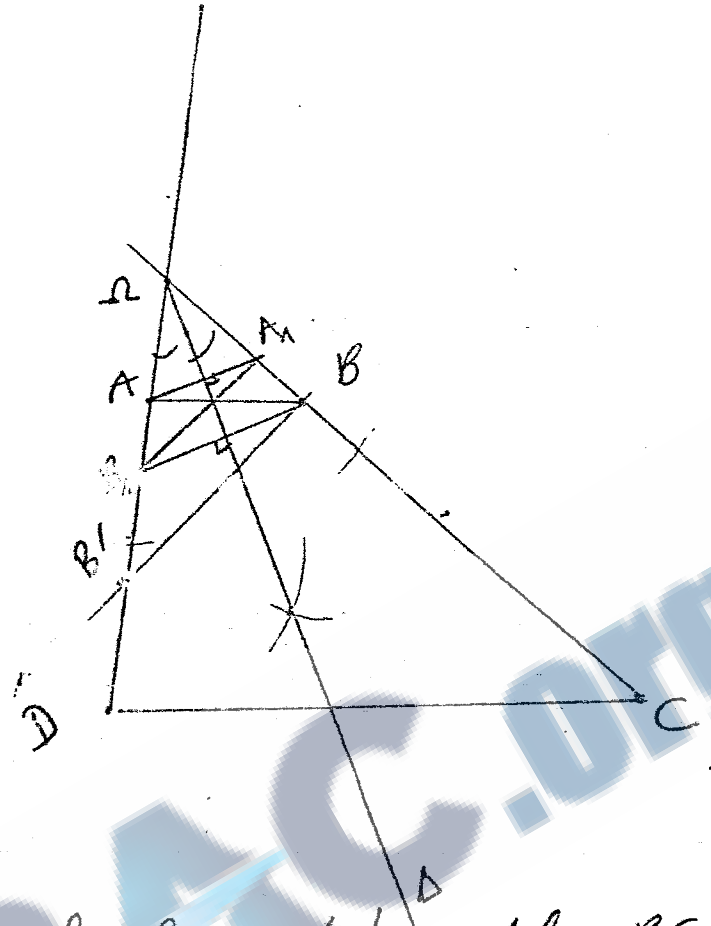
alors $2(\widehat{\vec{\Omega A},\vec{\Omega D}}) \equiv 2(\widehat{\vec{BA},\vec{BD}}) \ (2\pi)$

alors $\Omega \in$ au cercle - - — ADB.

Page : BAC – TUNISIE Site : www.BAC.org.tn Tél : 28.355.106 / 53.371.502

Exercice.2

$\frac{1}{23}$



1/ $\begin{cases} g(A)=B \\ g(D)=C \end{cases}$ alors le rapport de g est $k=\frac{BC}{AD} \neq 1$ car ABCD non isocèle.

alors g admet un centre.

on pose $g(\Omega)=\Omega$!

Dans le triangle ΩDC

on a : $\begin{cases} (AB)//(DC) \\ A\in(\Omega D) \\ B\in(\Omega C) \end{cases}$ alors $\frac{\Omega A}{\Omega D}=\frac{\Omega B}{\Omega C}=\frac{AB}{DC}=\alpha$ (1)

alors $\Omega A=\alpha\,\Omega D$ or $\vec{\Omega A}$ et $\vec{\Omega D}$ colinéaires de même sens d'où Ω bary de $(A,1)$ et $(B,-\alpha)$

de plus $g(\Omega) = \Omega'$
$g(A) = B$
$g(D) = C$

d'où Ω' bary de $(B,1)$ et $(C,-\alpha)$.

(1): $\frac{\Omega B}{\Omega C} = \alpha$

d'où $\Omega B = \alpha\, \Omega C$ or $\vec{\Omega B}$ et $\vec{\Omega C}$ ont le même sens

d'où $\vec{\Omega B} - \alpha\, \vec{\Omega C} = \vec{0}$

d'où Ω bary de $(B,1)$ et $(C,-\alpha)$

ainsi $\Omega' = \Omega$

et par suite Ω centre de g.

2) $g(A) = B$, Ω centre de g $\Big\}$ d'où Δ est la droite perpendicule la biss int de $A\hat{\Omega}B$.

3) a) $g = h_{(\Omega,k)} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ h_{(\Omega,k)}$

$S_\Delta(A) = A_1$

$g(A) = B$ d'où $h_{(\Omega,k)} \circ S_\Delta(A) = B$

d'où $h_{(\Omega,k)}(A_1) = B$

$S_\Delta(B) = B_1$

$g(B) = B'$ d'où $h_{(\Omega,k)} \circ S_\Delta(B) = B'$ d'où $h_{(\Omega,k)}(B_1) = B'$

3/13

d'où $(A_1B_1) // (BB')$.

b) $(A_1B_1) // (BB')$

alors $B' \in$ à la droite (δ) // à (A_1B_1) et passant par B.

$h \circ h = h_{(\Omega, k^2)}$

$h \circ h(A) = h(B) = B'$

d'où $h_{(\Omega, k^2)}(A) = B'$ d'où $B' \in (\Omega A)$

ainsi $B' \in (\delta) \cap (\Omega A)$.

4) a) $M_0 = A$

$M_1 = g(M_0) = g(A) = B$.

$M_2 = g(M_1) = g(B) = B'$

b) Pour $n = 1$; $M_1 = \underbrace{g}_{1 \text{ fois}}(A)$ vérifié.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; ~~suppose~~ $M_n = \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ fois}}(A)$

et Mq $M_{n+1} = \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{(n+1) \text{ fois}}(A)$

on a : $M_{n+1} = g(M_n)$

$= \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n+1}(A)$

ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $M_n = g \circ g \circ \cdots \circ g(A)$

c) n est pair alors $n = 2p$; $p \in \mathbb{N}$

$$M_n = \underbrace{(g \circ g) \circ (g \circ g) \circ \cdots \circ g \circ g}_{(2p)\text{ fois}}(A)$$

on pose $h = h_{(\Omega, k^2)}$

$$= \underbrace{(h \circ h \circ \cdots \circ h)}_{p\text{ fois}}(A)$$

$$= h_{(\Omega, k^{2p})}(A)$$

$$= h_{(\Omega, k_1^n)}(A)$$

alors $\vec{\Omega M_n} = k^n \vec{\Omega A}$; $k^n > 0$

alors Ω, M_n et A sont de même sens

alors $M_n \in [\Omega A)$

d) n est impair alors $n = 2p+1$; $p \in \mathbb{N}$.

$$M_n = \underbrace{(g \circ g) \circ (g \circ g) \circ \cdots \circ (g \circ g)}_{(2p)\text{ fois}} \circ g(A)$$

$$= h_{(\Omega, k^{2p})}(B)$$

alors $\vec{\Omega M_n} = k^{2p} \vec{\Omega B}$ $\quad k^{2p} > 0$

alors $\vec{\Omega M_n}$ et $\vec{\Omega B}$ sont de même sens

alors $M_n \in [\Omega B)$.