

Lycée Majida Boulila Professeur : Mme Hili	Série 3 Intégrale-Fonctions ln et exp	Classe : 4 ^{ème}
---	--	---------------------------

EXERCICE 1

Au dessous, figurent la courbe représentative (C) dans le repère orthonormé (O; i, j) d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que son asymptote (D) et sa tangente (T) au point d'abscisse 0.

On sait que le point $J(0; 1)$ est le centre de symétrie de la courbe (C), que l'asymptote (D) passe par les points $K(-1; 0)$ et J , et que la tangente (T) a pour équation $y = (1 - e)x + 1$.

1. Déterminer une équation de (D).

2. On suppose qu'il existe deux réels m et p et une fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x , $f(x) = mx + p + \varphi(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$

a) Démontrer que $m = p = 1$.

b) Montrer que, pour tout réel x , on a $f(x) + f(-x) = 2$.

c) En déduire, après avoir exprimé $f(x)$ et $f(-x)$, que la fonction φ est impaire.

d) Déduire de la question b. que f' , dérivée de f , est paire.

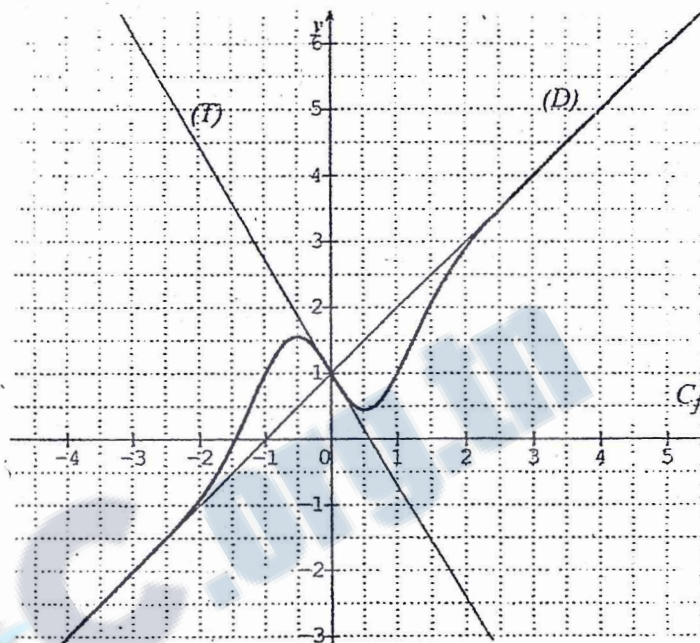
3. On suppose maintenant que, pour tout réel x , $\varphi(x) = (ax + b)e^{-x^2}$ où a et b sont des réels.

a) En utilisant la parité de φ , démontrer que $b = 0$.

b) Calculer $f'(x)$.

c) En utilisant le coefficient directeur de (T), démontrer que $a = -e$.

d) Démontrer que $f(x) = x + 1 - xe^{-x^2+1}$



مكتبة 18 جاتفي 1
مخرج باب الفريسي داخل المنور
مطابق الهاتف 02.740.485

EXERCICE 2

I/Ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé (O, i, j) la courbe (C) de la fonction logarithme népérien « ln » ainsi que la courbe (C_f) de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x+2}$

1) a) Placer les points de C d'abscisses e et $\sqrt{e}$.

b) Calculer $f(1)$ puis donner le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2) On considère la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = \ln(x) - f(x)$.

a) Montrer que g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

b) Dresser le tableau de variation de g .

c) Montrer que l'équation $f(x) = \ln(x)$ admet une unique solution α dans $[1, +\infty[$
Vérifier que : $3 < \alpha < 3,1$.

d) En déduire le signe de g sur $[1, +\infty[$.

e) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat

f) Tracer (C_g)

II/ On pose $I = \int_0^3 x^2 e^{-2x} dx$

1) A l'aide d'une double intégration par parties montre que $I = \frac{1}{4} - \frac{25}{4} e^{-6}$

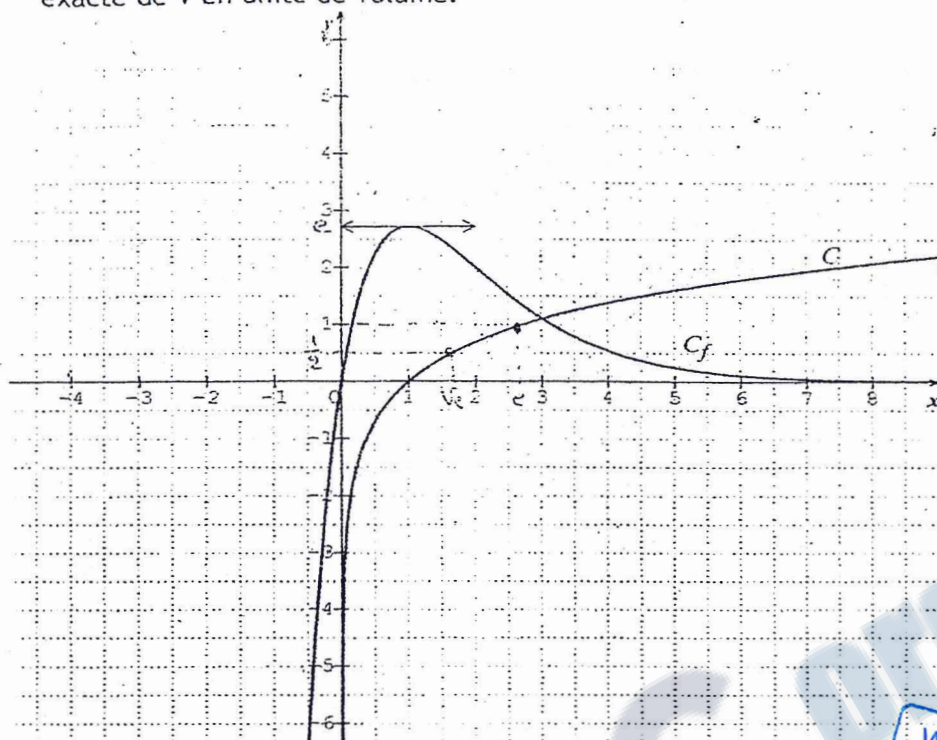
2) On définit le solide S obtenu par révolution autour de l'axe des abscisses de la

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

311

courbe $y = f(x)$ pour $0 \leq x \leq 3$.
Exprimer le volume V du solide S en fonction de l . Déterminer alors la valeur exacte de V en unité de volume.



مكتبة 18 جانفي
مدرج بيلو القروي داخل المبنى
صفاقس الهاتف 740.486

EXERCICE 3

- 1) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = xe^{-x}$.
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
- Dresser le tableau de variations de f .
 - Ecrire une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.
 - Etudier la position de C par rapport à T .

- 2) On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}; n \in \mathbb{N}$

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}; 0 < u_n \leq 1$.
 - Montrer que la suite U est décroissante.
 - En déduire que U est convergente et calculer sa limite.
- 3) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}; w_n = \ln u_n$
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}; w_n - w_{n+1} = u_n$.
 - On pose : pour $n \geq 1; S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$. Montrer que, pour tout $n \geq 1; S_n = -w_n$.
 - Déterminer la limite de la suite (S_n) .

EXERCICE 4

- 1) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2) dt$ est
- croissante sur $\mathbb{R}$
 - décroissante sur $\mathbb{R}$
 - n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.
- 2) $\int_{-1}^1 \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt =$ a) $2\ln(e - e^{-1})$ b) 0 c) $2\ln(e + e^{-1})$

312

مكتبة 18 جانفي
مدرج باب العربي داخل الساحة
مطابق الهاتف 740.486

Lycée Majida Boulila

4^{ème}

Serie 3

Intégrale Fonctions ln et exp

Exercice 1

1) $k \in \mathbb{D}$; $f(0,1) \in \mathbb{D}$... soit $D: y = ax + b$
 $a = \frac{y_j - y_k}{x_j - x_k} = \frac{1-0}{0-(-1)} = 1$ donc $D: y = x + b$; $f(0,1) \in D$ donc $1 = 0 + b = 1$
D: $y = x + 1$

2) a) $f(x) = mx + p + \varphi(x)$; $x \in \mathbb{R}$... avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (mx+p) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ d'où
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (m-1)x + (p-1) = 0$ donc $m=1$ et $p=1$

b) $f(0,1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ donc $f(x) + f(-x) = 2 \times 1 = 2$ $\forall x \in \mathbb{R}$
c) Soit $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = x + 1 + \varphi(x)$; $f(-x) = -x + 1 + \varphi(-x)$ donc
 $f(x) + f(-x) = x + 1 + \varphi(x) - x + 1 + \varphi(-x) = 2 + \varphi(x) + \varphi(-x) = 2$ d'où
 $\varphi(x) + \varphi(-x) = 0$ et par suite $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
Conclusion: φ est impaire

d) Soit $x \in \mathbb{R}$; $f(x) + f(-x) = 2$ donc $f'(x) - f'(-x) = 0$ d'où $f'(-x) = f'(x)$
pour tout $x \in \mathbb{R}$ et par suite f' est paire

3) a) Soit $x \in \mathbb{R}$; $\varphi(x) = (ax+b)e^{-x^2}$; φ est impaire donc $\varphi(0) = 0$
d'où $b = 0$

b) $f(x) = x + 1 + ax e^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
 $f'(x) = 1 + a e^{-x^2} + ax x - 2x e^{-x^2} = 1 + e^{-x^2} (-2ax + a)$

c) $T: y = (1-e)x + 1$ est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $f(0,1)$
donc $f'(0) = 1-e$ or $f'(0) = 1+a$ d'où $a = -e$

d) pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = x + 1 - e e^{-x^2} x = x + 1 - x e^{-x^2+1}$

313

Exercice 2

1/1) b) $f(1) = 1 \cdot e^{-1+2} = e$

$f'(x) = e^{-x+2} - x e^{-x+2} = (1-x) e^{-x+2}$ pour tout $x \in]-\infty; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x+2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x+2} = 0$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(1-x)$ car $e^{-x+2} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$

2) a) $g(x) = \ln(x) - f(x)$; $x \in [1; +\infty[$

$g'(x) = \frac{1}{x} - f'(x) > 0$ pour tout $x \in [1; +\infty[$ car $f'(x) \leq 0$; $x \in [1; +\infty[$ et $\frac{1}{x} > 0$ pour tout $x \in [1; +\infty[$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - f(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		$+$
$g(x)$	$-e$	$\rightarrow +\infty$

$g(1) = \ln(1) - f(1) = -e$

c) g est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ donc g réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur $g([1; +\infty[) = [-e; +\infty[$

$0 \in [-e; +\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$ d'où l'équation $f(x) = \ln(x)$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$

$g(3) = -0,005$; $g(3,1) = 0,0995$; $g(3) \times g(3,1) < 0$ donc $3 < \alpha < 3,1$

d)

x	1	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} e^{-x+2} = 0$ donc $(\mathcal{C}_g)$ admet une branche parabolique de direction $(0; \vec{e})$

314

II/ 1). $I = \int_0^3 x^2 e^{-2x} dx$: Intégration par partie.

$u(x) = x^2, u'(x) = 2x$

$v'(x) = e^{-2x}, v(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}$

$I = \left[-\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} \right]_0^3 - \int_0^3 -\frac{1}{2} x^2 \cdot (-2) e^{-2x} dx = -\frac{9}{2} e^{-6} + \int_0^3 x^2 e^{-2x} dx$

Soit $J = \int_0^3 x e^{-2x} dx$: Intégration par partie.

$u(x) = x, u'(x) = 1$

$v(x) = e^{-2x}, v'(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}$

$J = \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} \right]_0^3 - \int_0^3 -\frac{1}{2} e^{-2x} dx = -\frac{3}{2} e^{-6} + \frac{1}{2} \int_0^3 e^{-2x} dx = -\frac{3}{2} e^{-6} + \left[-\frac{1}{4} e^{-2x} \right]_0^3$

$J = -\frac{3}{2} e^{-6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-6}$

$I = -\frac{9}{2} e^{-6} - \frac{3}{2} e^{-6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-6} = \frac{1}{4} - \frac{25}{4} e^{-6}$

2). $V = \pi \int_0^3 f^2(x) dx = \pi \int_0^3 x^2 e^{-2x+4} dx = \pi e^4 \int_0^3 x^2 e^{-2x} dx = \pi e^4 I$

$V = \pi e^4 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{25}{4} e^{-6} \right) = \frac{\pi}{4} e^4 - \frac{25\pi}{4} e^{-2}$ unité de volume.

Exercice 3

1). a). $f(x) = x e^{-x}, x \in [0, +\infty[$

$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1-x) e^{-x}, x \in [0, +\infty[$; le signe de $f'(x)$ est celui de $(1-x)$

Car $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in [0, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$; $f(0) = 0$; $f(1) = e^{-1}$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\nearrow e^{-1}$	$\searrow 0$

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

b). $T: y = f'(0) \cdot (x-0) + f(0) = x$

c). $f(x) - x = x e^{-x} - x = x(e^{-x} - 1), x \in [0, +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f(x) - x$	0	-

donc f est au dessous de $T: y = x$

$\mathcal{S}_f \cap T = \{0, 1\}$

14

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

315

2) a) $U_0 = 1$; $U_{n+1} = f(U_n) = U_n e^{-U_n}$; $n \in \mathbb{N}$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 < U_n \leq 1$

* Pour $n=0$... $0 < U_0 = 1 \leq 1$ Vrai pour $n=0$

Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que $0 < U_n \leq 1$. Montrons que $0 < U_{n+1} \leq 1$

on a: $0 < U_n \leq 1$; f est croissante sur $[0, 1]$ donc $f(0) < f(U_n) \leq f(1)$

d'où $0 < U_{n+1} \leq e^{-1} \leq 1$

Conclusion: Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 < U_n \leq 1$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n \leq 0$ car f est au dessous de $T: y=x$

donc $(U_n)_n$ est décroissante

c) $(U_n)_n$ est décroissante et minorée par 0. donc $(U_n)_n$ est convergente

Soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$; $U_{n+1} = f(U_n)$; $n \in \mathbb{N}$ et f est continue sur $[0, 1]$ donc

$f(l) = l$ d'où $l = l e^{-l}$ or $0 \leq l \leq 1$ d'où $l = 0$ soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$; $w_n - w_{n+1} = \ln(U_n) - \ln(U_{n+1}) = \ln\left(\frac{U_n}{U_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{U_n}{U_n e^{-U_n}}\right)$
 $= \ln(e^{U_n}) = U_n$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} = (w_0 - w_1) + (w_1 - w_2)$
 $+ (w_2 - w_3) + \dots + (w_{n-1} - w_n) = w_0 - w_n$ or $w_0 = \ln(U_0) = \ln(1) = 0$

d'où $S_n = -w_n$

c) $w_0 = 0$; $w_n - w_{n+1} = U_n \in]0, 1]$ donc (w_n) est décroissante

$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0^+$ et $x \rightarrow \ln(x)$ est continue sur $]0, 1]$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(U_n) = -\infty$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

Exercice 4

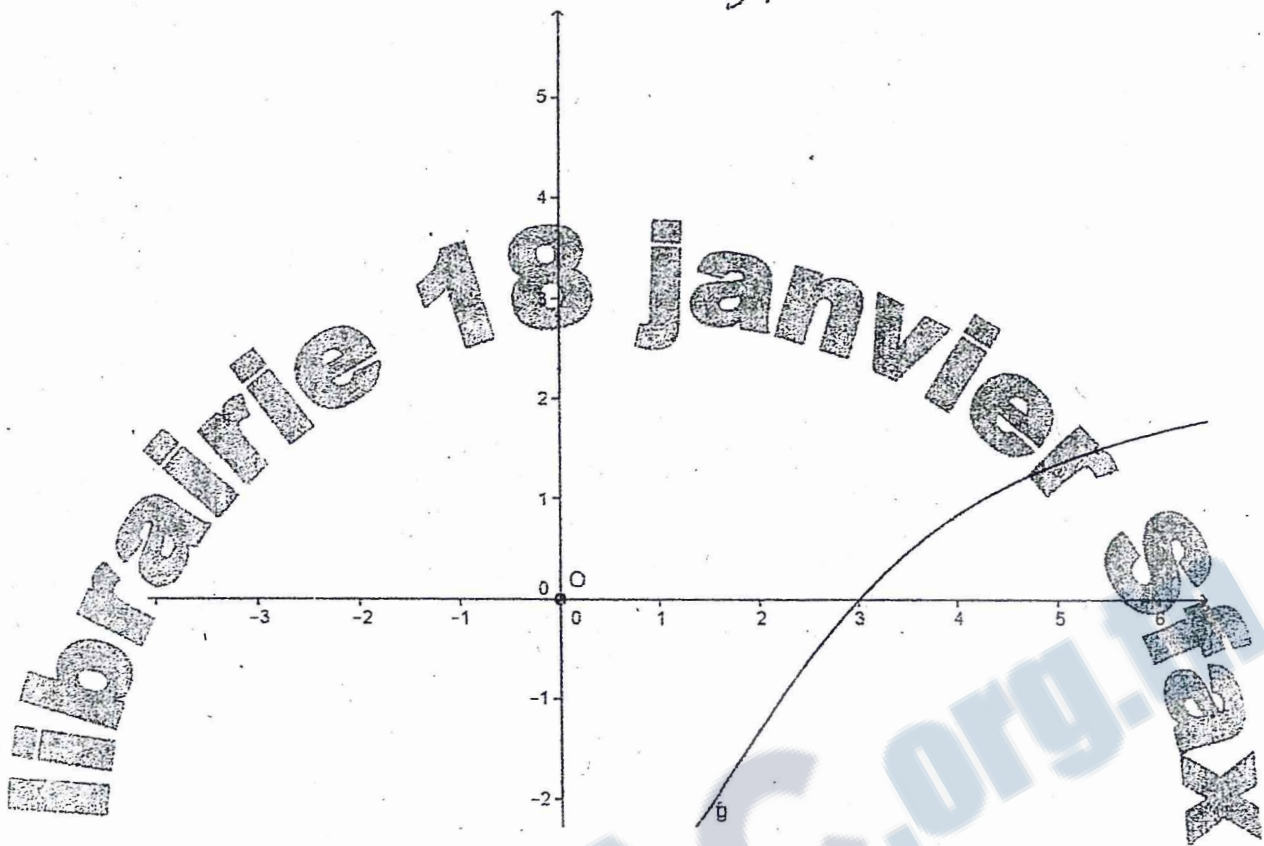
1) $\varphi: t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc φ admet une primitive sur $\mathbb{R}$ notée Φ

$f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2) dt = [\Phi(t)]_0^x = \Phi(x) - \Phi(0)$; $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \Phi'(x) = \varphi(x) = \ln(1+x^2) \geq 0$; $x \in \mathbb{R}$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$ a)

2) $\int_{-1}^1 \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt = [\ln(e^t + e^{-t})]_{-1}^1 = \ln(e + e^{-1}) - \ln(e^{-1} + e^1) = 0$ b)

316



www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

16

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502