

Révissez Votre Bac

Notre site « www.BAC.org.tn » vous donne accès à :

1- Des Examens de baccalauréat

2- Des Devoirs de contrôle et synthèse " Sfax et Autres "

3- Des Cours et des résumés " Facile A comprendre "

4- Des Séries avec corrigés

5- Des Quiz et des tests d'intelligence avec score

6- Des Groupes de discussion privée pour résoudre vos problèmes

7- Vous Pouvez Gagnés D'argent Facilement



SFA X

45c

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 351 197 / 53 371 502

Ex1:

Mettre sous forme trigonométrique

$$z_1 = (1+i\sqrt{3})^2 (1-i)^3 ; z_2 = \frac{(\sqrt{3}-i)^5}{(1-i)^2} ; z_3 = \frac{\sqrt{3}-i}{5i}$$

Ex2:

Soit $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$

1/ Ecrire z_1 , z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme trigonométrique

2/ a) Déterminer la forme algébrique de z_1/z_2

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

Ex3:

Soit A, B et C les pts du plan complexe d'affixes respectives

$$z_A = \frac{\sqrt{3}+i}{2} ; z_B = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_C = z_A + z_B$$

1/ Ecrire z_A , z_B et $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme exponentielle

2/ En déduire que AOB est rect et isocèle

3/ Placer A, B et C dans le plan muni d'un ROND $(O, \vec{u}, \vec{v})$

4/ mq l'OA CB est un carré

5/ a) Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{OC})$

b) Vérifier que $OC = \sqrt{2} OA$

c) En déduire une écriture sous forme exp de z_C

Ex4:

1/ Déterminer l'ens (E) des pts $M(z)$; $|iz+1-i| = |z+1|$

2/ Déterminer l'ens (F) des pts $M(z)$; $z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$; $\theta \in [0, \pi]$

3/ Déterminer l'ens (G) des pts $M(z)$; $z = 1 + i \cos \theta$; $\theta \in [0, \pi]$

4/ Déterminer l'ens (H) des pts $M(z)$ tq $z' = \frac{iz-1}{z+1}$ est réel

Ex 1.

$$z_1 = (1+i\sqrt{3})^2 (1-i)^3$$

$$r = |1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \quad \left\{ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi) \right.$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Donc } 1+i\sqrt{3} = [2, \pi/3]$$

$$\text{de même } 1-i = [\sqrt{2}, -\pi/4]$$

$$z_1 = [2, \pi/3]^2 \cdot [\sqrt{2}, -\pi/4]^3$$

$$= [4, \frac{2\pi}{3}] \cdot [\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4}]$$

$$= [8\sqrt{2}, \frac{2\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}]$$

$$= [8\sqrt{2}, -\pi/12]$$

$$z_2 = \frac{(\sqrt{3}-i)^5}{(1-i)^2}$$

$$= \frac{[2, -\pi/6]^5}{[\sqrt{2}, -\pi/4]^2}$$

$$= \frac{[32, -5\pi/6]}{[2, -\pi/2]}$$

$$= [16, -\pi/3]$$

$$= [16, -\pi/3]$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{3}-i}{5i}$$

$$= \frac{[2, -\pi/6]}{[5, \pi/2]}$$

$$= [\frac{2}{5}, -\frac{2\pi}{3}]$$

Ex 2.

$$z_1 = 2 - 2i ; z_2 = -1 - i\sqrt{3}$$

$$1^\circ z_1 = [2\sqrt{2}, -\pi/4]$$

$$z_2 = [2, -2\pi/3]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{[2\sqrt{2}, -\pi/4]}{[2, -2\pi/3]}$$

$$= [\sqrt{2}, 5\pi/12]$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

$$2^\circ a) \frac{z_1}{z_2} = \frac{2-2i}{-1-i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(2-2i)(-1+i\sqrt{3})}{1+3}$$

$$= \frac{-2 + 2i\sqrt{3} + 2i + 2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + i \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

1 0 0 1 0 0 0 1 0 1 1 1

on sait que

$$\frac{1}{2} = \sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{12} + i \sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{12}$$

$$= \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + i \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

x 3 :

$$3A = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$= \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$B = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R};$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(exponentielle $i\theta$)

Exp :

$$1+i\sqrt{3} = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Propriétés :

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}; -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$$

$$e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

Cas particuliers

$$1 = [1, 0] = e^{i0}$$

$$-1 = [1, \pi] = e^{i\pi}$$

$$i = [1, \frac{\pi}{2}] = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$-i = [1, -\frac{\pi}{2}] = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Exp : Envisager $z = -2i(e^{i\frac{\pi}{3}})^2$ sous forme exponentielle

$$z = -2i(e^{i\frac{\pi}{3}})^2 = 2e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

page 2 (02 09 10 11)

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{e}{e^{i\pi/6}}$$

$$= e^{i(2\pi/3 - \pi/6)}$$

$$= e^{i\pi/2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{z_B}{z_A} \right| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{|z_B|}{|z_A|} = 1$$

$$\Rightarrow \underline{OB = OA} \quad (1)$$

$$\frac{z_B}{z_A} = e^{i\pi/2} = i \in i\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{z_{OB}}}{\vec{z_{OA}}} \in i\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{OA} \perp \vec{OB}} \quad (2)$$

1) et (2) $\Rightarrow$ OAB est un triangle isocèle et rectangle en O.

$$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i(\frac{\theta+\theta'}{2})} \left(e^{i(\frac{\theta-\theta'}{2})} + e^{-i(\frac{\theta-\theta'}{2})} \right)$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) e^{i(\frac{\theta+\theta'}{2})}$$

Formules d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$\left. \begin{aligned} e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= 2 \cos \theta \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= 2i \sin \theta \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Formules} \\ \text{d'Euler} \end{array}$$

Application

$$e^{i\theta} + 1 = e^{i\theta} + e^{i0}$$

$$= e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}} \right) = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$e^{i\theta} - i = e^{i\theta} - e^{i\pi/2}$$

$$= e^{i(\frac{\theta+\pi}{2})} \left(e^{i(\frac{\theta-\pi}{2})} - e^{-i(\frac{\theta-\pi}{2})} \right)$$

$$= 2i \sin\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right) e^{i(\frac{\theta+\pi}{2})}$$

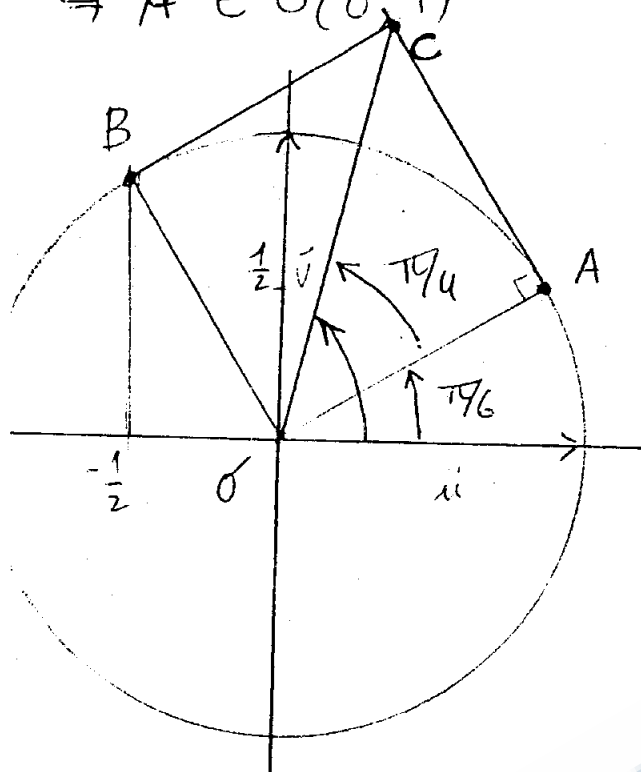
$$= 2 \sin\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right) e^{i(\frac{\theta+\pi}{2})}$$

page 3 (02 09 10 11)

$$\partial A = \sqrt{1 - i^2} = 1$$

$$\Rightarrow OA = 1$$

$$\Rightarrow A \in \mathcal{C}(O, 1)$$



$$z_B = e^{i2\pi/3} \Rightarrow |z_B| = 1$$

$$\Rightarrow B \in \mathcal{C}(O, 1)$$

$$c = z_A + z_B$$

$$z_{OC} = z_{OA} + z_{OB}$$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

$$\therefore \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

$$\Rightarrow OACB \text{ est un \#}$$

$$\text{or } OA = OB \text{ et } (OA) \perp (OB)$$

Dmc OACB est un Carré

$$\frac{5\pi}{12} / (\vec{u}, \vec{OC}) \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} (2\pi)$$

$$\equiv \frac{5\pi}{12} (2\pi)$$

b) OAC est un triangle rectangle en A

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{OA}{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{OC}{OA} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow OC = \sqrt{2} \cdot OA$$

$$C : OC = \sqrt{2} \cdot OA \text{ or } OA = 1$$

$$\Rightarrow OC = \sqrt{2} \Rightarrow |z_C| = \sqrt{2}$$

$$(\vec{u}, \vec{OC}) \equiv \frac{5\pi}{12} (2\pi)$$

$$\Rightarrow \arg(z_C) \equiv \frac{5\pi}{12} (2\pi)$$

$$\underline{\underline{Dmc}} \quad z_C = \sqrt{2} e^{i5\pi/12}$$

page 4/02 0910 11)

$$\begin{aligned} 1) \quad |iz + 1 - i| &= |z + 1| \\ \Rightarrow |i(z - i - 1)| &= |z + 1| \\ \Rightarrow |i| \cdot |z - (1 + i)| &= |z - (-1)| \\ \Rightarrow |z_M - z_A| &= |z_M - z_B| \\ \text{avec } \begin{cases} z_A = 1 + i \\ z_B = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AM = BM$$

$$\Rightarrow M \in \text{med}[AB]$$

$$2) \quad z_M = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$$

avec $\theta \in [0, \pi]$

1^{ère} Méthode (analytique)

Si $M(x, y)$ Alors

$$\begin{cases} x = 1 + \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = x - 1 \\ \sin \theta = y \end{cases}$$

$$AB = |z_B - z_A|$$

Rq:

$$\bullet AM = BM \Rightarrow M \in \text{med}[AB]$$

$$\bullet \overline{AM} \perp \overline{BM} \Rightarrow M \in \mathcal{C}[AB]$$

$$\bullet \overline{AM} \text{ et } \overline{BM} \text{ sont col} \Rightarrow M \in (AB)$$

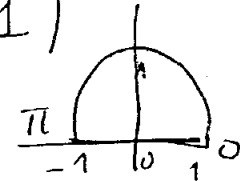
$$\bullet AM = r \Rightarrow M \in \mathcal{C}(A, r)$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow M \in \mathcal{C}(A(1, 0); 1)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

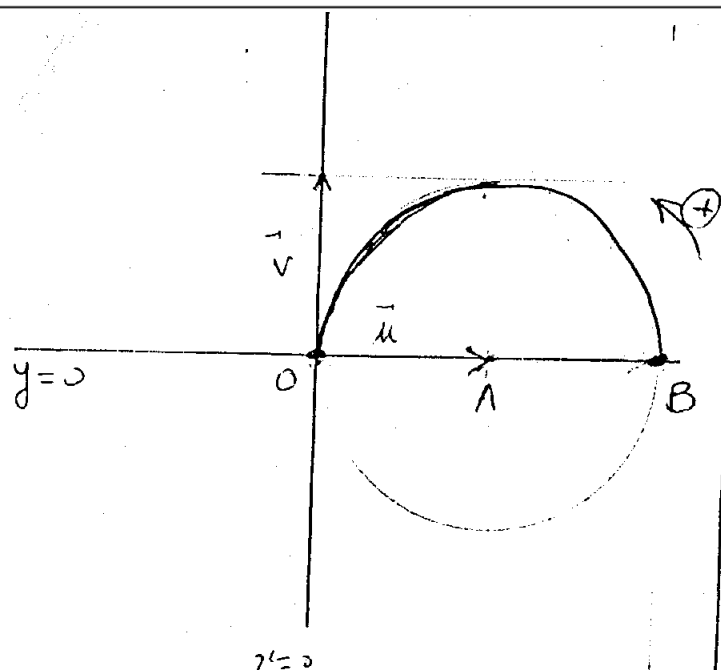


$$\Rightarrow \begin{cases} -1 \leq \cos \theta \leq 1 \\ 0 \leq \sin \theta \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x - 1 \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

page 5 (02091011)



concl : l'ens des pts M est l'arc $\widehat{BO}$ du cercle $\mathcal{C}(A, 1)$

avec $z_B = 2$

2^e Méthode (Géométrique)

$$z_M = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\Rightarrow z_M = 1 + e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow z_M - 1 = e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z_M - 1| = 1 \\ \arg(z_M - 1) \equiv \theta (2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z_M - z_A| = 1 & (z_A = 1) \\ \arg(z_M - z_A) \equiv \theta (2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AM = 1 \\ (\vec{u}, \vec{AM}) = \theta (2\pi) \end{cases}$$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z') (2\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in \mathcal{C}(A, 1) \\ (\vec{u}, \vec{AM}) \equiv \theta (2\pi) \end{cases}$$

or $0 \leq \theta \leq \pi$

Dnc l'ens des pts M est l'arc $\widehat{BO}$ du cercle $\mathcal{C}(A, 1)$ avec

$$z_B = 2$$

$$z_M = 1 + i \cos \theta$$

$$\text{avec } \theta \in [0, \pi]$$

$$\sin(x, y) \text{ Alors } \begin{cases} x = 1 \\ y = \cos \theta \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \Rightarrow -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq y \leq 1$$

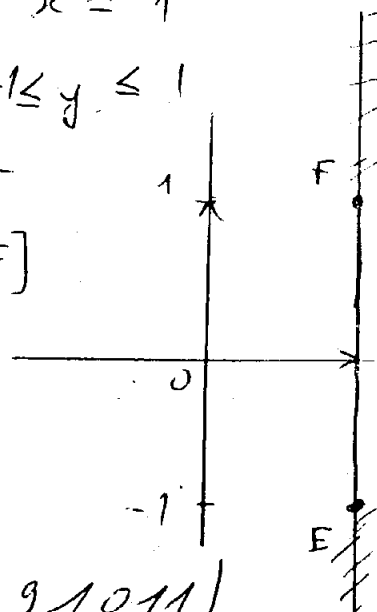
Dnc

$$M(x, y) \text{ avec } \begin{cases} x = 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

l'ens des pts M est le segment $[EF]$

$$\text{avec } z_E = 1 - i$$

$$\text{et } z_F = 1 + i$$



note 6/0209/0111

$$z = \frac{z}{z+1} \in \mathbb{R}$$

$$\text{and } z+1 \neq 0 \Rightarrow z \neq -1$$

$$\frac{iz-1}{z+1} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow i \left(\frac{z+i}{z+1} \right) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z+i}{z+1} \right) \in i\mathbb{R}$$

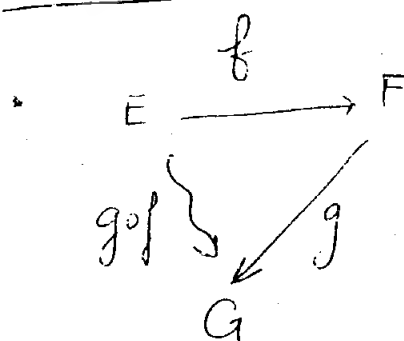
$$\Rightarrow \frac{z_M - z_A}{z_M - z_B} \in i\mathbb{R} \quad \begin{cases} z_A = -i \\ z_B = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{z_{AM}}}{\overline{z_{BM}}} \in i\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \overline{AM} \perp \overline{BM}$$

$$\Rightarrow M \in \mathcal{C}[AB] \setminus \{B\}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{C}[AB] \setminus \{B\}$$



$$x \in \mathbb{R} (\Rightarrow x \in i\mathbb{R})$$

$$ix \in i\mathbb{R} (\Rightarrow x \in \mathbb{R})$$

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

Exp.

$$h(x) = \cos(x^2 + 1)$$

$$f: x \mapsto x^2 + 1$$

$$g: x \mapsto \cos x$$

$$h = g \circ f$$

$$h(x) = g[f(x)] = g \circ f(x)$$

Th: Cont de la fonction composée

Si $\begin{cases} f \text{ est cont sur } I \\ g \text{ est cont sur } J \end{cases}$
 $\forall x \in I, f(x) \in J$
 Alors $g \circ f$ est cont sur I

Th: $l \xrightarrow{f} l'$

$$\text{Si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \\ \lim_{x \rightarrow l} g(x) = l' \end{cases}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow a} g[f(x)] = l'$$

page 7 (02 09 10 11)

limites et ordre.

Si

Alors

$$u(x) \leq v(x)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$l \in \mathbb{R} \quad l' \in \mathbb{R}$$

$$l \leq l'$$

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = l \quad \lim_{x \rightarrow a} v(x) = l' \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$f(x) \geq u(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

$$f(x) \leq u(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

Ex : $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1$

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\forall x \neq 0; -1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

$$\Rightarrow -x^2 + 1 \leq f(x) \leq x^2 + 1$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2) = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot f(x) = 1$$

Exp.

$$f(x) = 1 - 2x + \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)$$

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$

$$\forall x \in \mathbb{R}; -1 \leq \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \leq 1$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}; -2x \leq f(x) \leq 2 - 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \begin{cases} f(x) \geq -2x \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} f(x) \leq 2 - 2x \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - 2x) = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Def : $\Delta: y = ax + b$ ($a \neq 0$) s.t. Δ AO
 $\bar{a}$ est au $v(+\infty)$ s.t.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$

th. $\Delta: y = ax + b$ ($a \neq 0$) AO $\bar{a}$ est
 au $v(+\infty)$ s.t.

$$\begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) \end{cases}$$

note 8/02 0.9 10 11

Kacine Laroui

$$\bullet -4 = (2i)^2$$

$$\bullet 2i = (1+i)^2$$

$$\bullet -2i = (1-i)^2$$

$$\bullet 8i = 4 \times 2i$$

$$= [2(1+i)]^2$$

$$\bullet -\sin^2 \theta = (i \sin \theta)^2$$

$$\bullet e^{i\theta} = \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

$$\bullet \Delta = 3 - 4i$$

$$= 4(-1) - 4i$$

$$= 2^2 + i^2 - 2 \times 2 \times i$$

$$= (2 - i)^2$$

$$\Delta = 5 + 12i$$

$$= 9 - 4 + 12i$$

$$= 3^2 + (2i)^2 + 2 \times 3 \times 2i$$

$$= (3 + 2i)^2$$

$$\Delta = 7 + 24i$$

$$= 16(-9) + 24i$$

$$= 4^2 + (3i)^2 + 2 \times 4 \times 3i$$

$$= (4 + 3i)^2$$

$$\bullet \Delta = 21 - 20i$$

$$= 25(-4) - 20i$$

$$= 5^2 + (2i)^2 - 2 \times 5 \times 2i$$

$$= (5 + 2i)^2$$

$$\bullet \Delta = 16 + 30i$$

$$= 25(-9 + 30i)$$

$$= 5^2 + (3i)^2 + 2 \times 5 \times 3i$$

$$= (5 + 3i)^2$$

Case

1

4

9

16

25

36

1

1

1