

Révissez Votre Bac

Notre site « www.BAC.org.tn » vous donne accès à :

1- Des Examens de baccalauréat

2- Des Devoirs de contrôle et synthèse " Sfax et Autres "

3- Des Cours et des résumés " Facile A comprendre "

4- Des Séries avec corrigés

5- Des Quiz et des tests d'intelligence avec score

6- Des Groupes de discussion privée pour résoudre vos problèmes

7- Vous Pouvez Gagnés D'argent Facilement



EXERCICE N°1

On se propose dans cet exercice de calculer $I = \int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$

1/ Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$.

On désigne par F sa primitive sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 1.

Soit G la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $G(x) = F\left(\frac{1}{\cos x}\right)$.

a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) En déduire l'expression de $G(x)$ en fonction de x .

2/ Calculer alors I .

EXERCICE N°2

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$.

Cf sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1/ a) Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $f'(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f .

2/ Ecrire une équation de la tangente T à la courbe Cf au point d'abscisse 2.

3/ Tracer T et Cf.

4/ a) Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a\sqrt{x-1} + \frac{b}{\sqrt{x-1}}$ pour tout $x \in]1, +\infty[$.

b) En déduire une primitive de f sur $]1, +\infty[$.

c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

EXERCICE N°3

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Dresser le tableau de variation de f .

2/ Etudier la position de C_f par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

3/ Tracer Δ et C_f .

4/ Soit $I = \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{2x+1}} dx$.

a) Donner une interprétation graphique de I .

b) Calculer I .

5/a) Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C' de la fonction réciproque de f .

c) Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par C_f et C' .

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

4ème science

Exercice N°1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne la fonction $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f_n(x) = x^n \sin \pi x$

si $n \neq 0$ et $f_0(x) = \sin \pi x$ si $n = 0$, et on note $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1/ Calculer I_0 et I_1 .

2/ A l'aide de deux intégrations par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n-2} pour $n \geq 2$.

3/ Calculer I_2 et I_3 .

4/ Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x) = x^2 \sqrt{\sin(\pi x)}$ et C sa courbe. Déterminer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses.

Exercice N°2

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. on désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/a. Vérifier que $f^{-1}(x) = \frac{2x-x^3}{(\sqrt{1-x^2})^3}$. En déduire que f réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$.

2/ Soit $F(x) = \int_0^{\sin(x)} \sqrt{1-t^2} dt$: $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

a. Montrer que F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et calculer $F'(x)$.

b. En déduire que $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

c. Calculer alors $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$.

d. En déduire que $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx = \frac{\pi-2}{8}$.

3/ on donne ci-dessous les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$

Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , $(C_{f^{-1}})$ et les droites d'équations

$$x=0 \text{ et } x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice N°3

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ et $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx$; $n \geq 1$

1) Calculer I_0 .

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2}$.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2) \int_0^1 x^{2n+1} \sqrt{x^2+1} dx$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $(2n+3)I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2)I_n$.

c) Calculer, alors l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

$$E \wedge n \geq 1$$

$$\begin{aligned} \text{1}^{\circ} I_0 &= \int_0^1 f_0(x) dx \\ &= \int_0^1 \sin(\pi x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \right]_0^1 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\pi} (-1 - 1) = \boxed{\frac{2}{\pi} = I_0}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 f_1(x) dx \\ &= \int_0^1 x \sin(\pi x) dx \end{aligned}$$

on pose $u(x) = x \rightarrow u'(x) = 1$
 $v'(x) = \sin(\pi x) \rightarrow v(x) = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x)$

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[x \times \left(-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \right) \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \cos \pi - 0 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos(\pi x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \times \left[\frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} \times \left(\frac{\sin \pi}{0} - \frac{\sin 0}{0} \right) = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

$$\boxed{I_n = \frac{1}{\pi}}$$

$$\text{2}^{\circ} I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$$

on pose $u(x) = x^n \rightarrow u'(x) = nx^{n-1}$

$v'(x) = \sin(\pi x) \rightarrow v(x) = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x)$

$$\text{alors } I_n = \left[x^n \times \left(-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \right) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-n}{\pi} x^{n-1} \cos(\pi x) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_0^1 x^{n-1} \cos(\pi x) dx$$

on pose $u(x) = x^{n-1} \rightarrow u'(x) = (n-1)x^{n-2}$
 $v'(x) = \cos(\pi x) \rightarrow v(x) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi x)$

$$\begin{aligned} J &= \left[x^{n-1} \times \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{n-1}{\pi} x^{n-2} \sin(\pi x) dx \\ &= -\frac{(n-1)}{\pi} \int_0^1 x^{n-2} \sin(\pi x) dx \end{aligned}$$

$$\boxed{J = \frac{1-n}{\pi} I_{n-2}}$$

alors $I_n = \frac{1}{\pi} + \frac{n}{\pi} \times \frac{(1-n)}{\pi} I_{n-2}$

$$\boxed{I_n = \frac{1}{\pi} + \frac{n-n^2}{\pi^2} I_{n-2}}$$

$$\text{3}^{\circ} I_2 = \frac{1}{\pi} + \frac{2-4}{\pi^2} I_0$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi} + \frac{3-9}{\pi^2} \times I_1$$

$$\text{3°} \quad I_n = \frac{1}{\pi} + \frac{n-n^2}{\pi^2} I_{n-2}$$

pour $n=2$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} + \frac{2-2^2}{\pi^2} I_0$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} \times \frac{2}{\pi}$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}$$

pour $n=3$

$$I_3 = \frac{1}{\pi} + \frac{3-3^2}{\pi^2} I_1$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi} - \frac{6}{\pi^2} \times \frac{1}{\pi}$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi} - \frac{6}{\pi^3}$$

$$\text{1°} \quad V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(x^2 \sqrt{\sin \pi x} \right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^1 x^4 \sin(\pi x) dx$$

$$V = \pi I_4$$

$$\text{a} \quad I_4 = \frac{1}{\pi} + \frac{4-4^2}{\pi^2} I_2$$

$$\text{alors } I_4 = \frac{1}{\pi} - \frac{12}{\pi^2} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3} \right)$$

$$I_4 = \frac{1}{\pi} - \frac{12}{\pi^3} + \frac{48}{\pi^5}$$

$$\text{alors } V = \pi \left(\frac{1}{\pi} - \frac{12}{\pi^3} + \frac{48}{\pi^5} \right)$$

$$V = 1 - \frac{12}{\pi^2} + \frac{48}{\pi^4} \text{ u.v}$$

Exercice 2

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

1° $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $[0, 1[$
 a/ $x \mapsto 1-x^2$ est dérivable

et strictement positive sur $[0, 1[$
 alors $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable
 sur $[0, 1[$ et $\forall x \in [0, 1[, \sqrt{1-x^2} \neq 0$

alors f est dérivable sur $[0, 1[$.

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2} - x^2 \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}^2}$$

$$= \left(2x\sqrt{1-x^2} + \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \right) \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{2x(1-x^2) + x^3}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{2x - 2x^3 + x^3}{\sqrt{1-x^2}^2}$$

$$= \frac{2x - x^3}{\sqrt{1-x^2}^3}$$

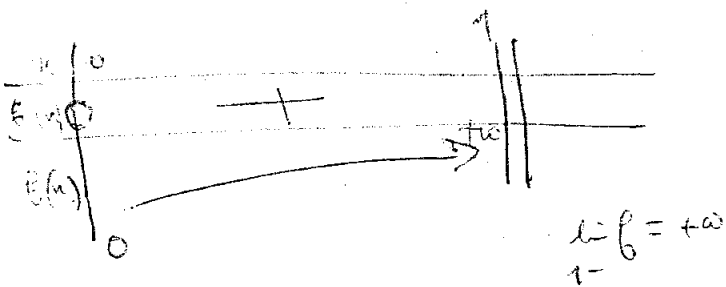
$$2x - x^2 = 0$$

$$x(2 - x^2) = 0$$

$$(\Rightarrow) x = 0 \text{ ou } x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \text{ ou } -\sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
x					
$2-x^2$	-	0	+	+	-
P	+	0	-	+	0



f est dérivable sur $[0, 1[$ alors elle est continue sur $[0, 1[$.

et elle strictement croissante sur $[0, 1[$ alors f réalise une bijection de $[0, 1[$ sur

$$f([0, 1[) = [0, +\infty[$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x \times \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\text{on pose } u(x) = x \longrightarrow u'(x) = 1$$

$$V'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow V(x) = -\frac{1}{2} x^2 \sqrt{1-x^2}$$

$$V(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx = \left[-x\sqrt{1-x^2} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1-\frac{1}{2}} + 0 + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\frac{x^2}{F(x)} = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt, x \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

$$\text{on pose } G(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2} dt, x \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$$

$$F(x) = G(\sin x)$$

$$\bullet x \mapsto \sin x \text{ dérivable sur } [0, \frac{\pi}{4}]$$

$$\bullet t \mapsto \sqrt{1-t^2} \text{ est continue sur } [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$$

$$\text{alors } G(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2} dt \text{ est dérivable sur } [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$$

$$\bullet \forall x \in [0, \frac{\pi}{4}] , \sin x \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$$

$$\text{alors } F \text{ est dérivable sur } [0, \frac{\pi}{4}]$$

$$F'(x) = (\sin x)' \times G'(\sin x)$$

$$= \cos x \times \sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$= \cos x \sqrt{\cos^2 x}$$

$$= \cos x |\cos x| \quad (x \in [0, \frac{\pi}{4}] \text{ et } \cos x > 0)$$

$$= \cos^2 x$$

$$F'(x) = \cos^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$F'(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$\text{Or } F(0) = \int_0^0 \sqrt{1-t^2} dt = 0$$

$$= \int_0^0 \sqrt{1-t^2} dt = 0$$

$$\text{donc } \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4} \sin 0 + C = 0$$

$$\Rightarrow C = 0$$

$$\text{avec } F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-x^2} dx$$

$$= \int_0^{\sin \frac{\pi}{4}} \sqrt{1-x^2} dx$$

$$= F\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

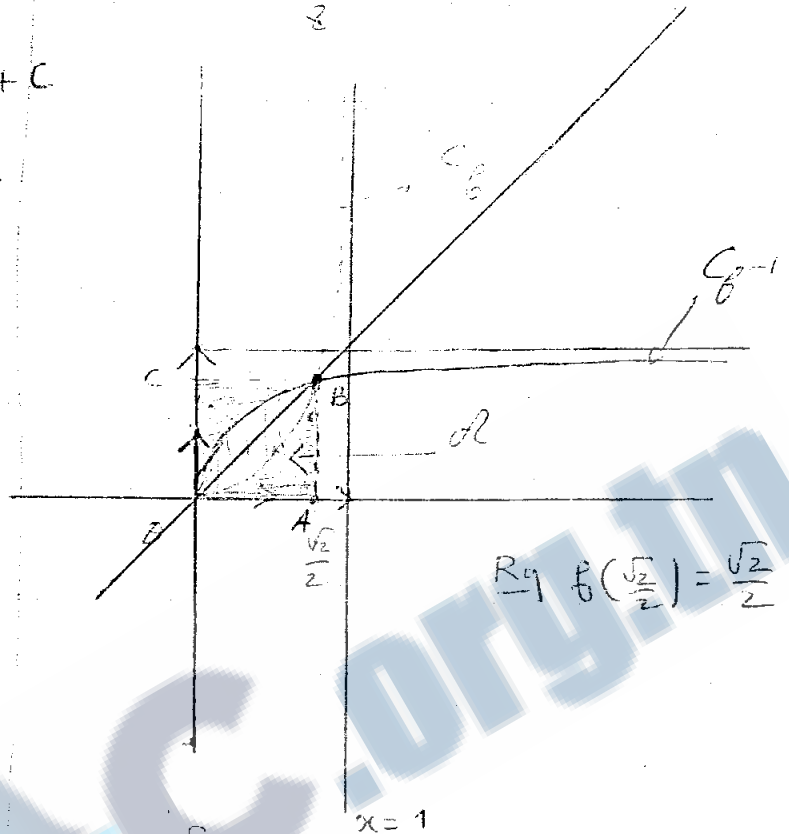
d) on a d'après 1) b)

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx = 1 - \frac{\pi}{4} \text{ u.a.}$$

(3)

$$= -\frac{1}{2} + \frac{11}{8} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{-4 + 11 + 2}{8} = \frac{9-2}{8}$$



$$A = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx$$

S est l'aire de la partie du plan limitée par C_f et C_{f-1} et les droites d'éq $x=0$ et $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$S = A_{OABC} - 2A$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{\pi-2}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{2\pi-4}{8}\right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

Ex 1°3

$$1^{\circ}) I_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2+1} \right]_0^1$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

$$2^{\circ}) \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$1 \leq x^2 + 1 \leq 2$$

$$1 \leq \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{2}$$

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1$$

$$0 \leq \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} \leq x^{2n+1}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \mapsto 0 \\ x \mapsto x^{2n+1} \\ x \mapsto \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} \end{array} \right\} \text{ sont des fonctions}$$

continues sur $[0,1]$ donc

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx \leq \int_0^1 x^{2n+1} dx$$

$$0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2} \right]_0^1$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2}, \forall n \geq 1$$

$$I_0 = \sqrt{2} - 1 \quad 0 \leq \sqrt{2} - 1 \leq \frac{1}{2} \quad \text{voir 61a}$$

$$b) I_{n+1} - I_n \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{\sqrt{x^2+1}} dx - \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} (x^2 - 1) dx$$

$$\forall x \in [0,1], \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} \geq 0$$

$$\text{et } x^2 - 1 \leq 0$$

$$\text{donc } (x^2 - 1) \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} \leq 0$$

$$\text{donc } \int_0^1 (x^2 - 1) \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx \leq 0$$

donc (I_n) est décroissante.
 $\left(\begin{array}{l} x^{2n+1} \geq 0 \\ \forall x \in [0,1] \end{array} \right) \Rightarrow \text{donc } 0 \leq I_n \text{ donc } (I_n) \text{ est minorée par } 0$
 (I_n) est décroissantedonc (I_n) est convergente

$$* \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2}$$

$$\text{car } 0 = 0$$

$$n \rightarrow +\infty$$

$$\text{car } \frac{1}{2n+2} = 0$$

$$n \rightarrow +\infty$$

$$\text{donc } I_n = 0$$

$$n \rightarrow +\infty$$

$$3^{\circ}) a) I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{2n+2} \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$\text{on pose } u(x) = x^{2n+2} \rightarrow u'(x) = (2n+2)x$$

$$v'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \rightarrow v(x) = \sqrt{x^2+1}$$

$$\text{donc } I_{n+1} = \left[x^{2n+2} \sqrt{x^2+1} - \int_0^1 (2n+2)x \sqrt{x^2+1} dx \right]$$

$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2) \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

~~$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2) \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx$$~~

3) b)

$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2) \times \int_0^1 \frac{x^{2n+1} (x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2) \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2) \left(\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{\sqrt{x^2+1}} dx + \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx \right)$$

$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2) (I_{n+1} + I_n)$$

$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2) I_{n+1} - (2n+2) I_n$$

$$I_{n+1} + (2n+2) I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2) I_n$$

$$(2n+3) I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2) I_n$$

c) $J = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$

on remarque $J = I_1$

or d'après la relation 3) b)

$$3 I_1 = \sqrt{2} - 2 I_0$$

$$I_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} I_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} (\sqrt{2} - 1) = \frac{-\sqrt{2} + 2}{3}$$

$$\text{alors } \int_0^1 x^n H(x) (n-1) dx > 0$$

$$\text{donc } I_{n+1} - I_n > 0$$

alors (I_n) est croissante

d) on a $x^n \geq 0 \forall x \in [0, 1]$

$$H(x) \leq 0 \forall x \in [0, 1]$$

$$\text{alors } x^n H(x) \leq 0 \forall x \in [0, 1]$$

et $x \mapsto x^n H(x)$ est continue sur $[0, 1]$

$$\text{alors } \int_0^1 x^n H(x) dx \leq 0$$

$$\text{donc } I_n \leq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et on (I_n) est croissante

alors (I_n) est convergente.

e) $x \in [0, 1]$

H est str $\nearrow$ sur $[0, 1]$

$$\text{alors } H(0) \leq H(x) \leq H(1)$$

$$H(0) \leq H(x) \leq 0$$

$$\text{et } x^n \geq 0 \forall x \in [0, 1] \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{alors } x^n H(0) \leq x^n H(x) \leq 0$$

$$\text{donc } x^n H(0) \leq x^n H(x) \leq 0$$

$$\int_0^1 x^n H(0) dx \leq \int_0^1 x^n H(x) dx \leq \int_0^1 0 dx$$

$$H(0) \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \leq I_n \leq 0$$

$$H(0) \times \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 0$$

$$\text{et on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} H(0) \times \frac{1}{n+1} = 0$$

$$n \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

$$n \rightarrow +\infty$$

$$\text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$