
DEVOIR & SÉRIES
COURS & RÉVISION
EXAMENS BAC
BAC .org.tn
WWW.BAC.ORG.TN
SECTION SCIENCE
SECTION INFORMATIQUE
SECTION ECONOMIE & GESTION
SECTION TECHNIQUE
SECTION LETTRE
SECTION MATH
SECTION SPORT

4éme Sc

ExerciceN°1 Donner la bonne réponse on justifiant

1/La valeur moyenne de la fonction f définie par f(x)= $\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ sur [0,1] est égale :

a/ $\ln(\frac{1}{e}+1)-\ln 2$ b/ $\ln(\frac{2e}{e+1})$ c/ $\frac{1}{1+e}-\frac{1}{2}$

2/ Soit C={M(x,y) tel que $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ et $1 \leq x \leq 4$} et soit S le solide de révolution obtenu par la rotation de C autour de l'axe (Ox)

Le volume du solde S est égal à : a/$2\pi^2\ln 2$ b/2 π c/ 2π ln2

3/ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$ est égale à a/0 b/ 1 c/ +∞

4/le réel $e^{-3\ln(\frac{1}{2})}$ est égale à a) $-\frac{1}{8}$ b)8 c)-6

5/ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-e^x}{e^x+1}$ égal à : a) -1 b) 1 c) +∞.

6/soit la fonction f définie sur IR_+ par $f(x)=\int_1^x \sqrt{t}e^{t-1}dt$ et la fonction g définie par g(x)= f(x²) Alors g'(x)est égal à : a) $\sqrt{x}e^{x-1}$ b)$2x^2e^{x^2-1}$ c)xe^{x^2-1}

Exercice n°2 Soit f la fonction définie sur $\Re$ par : $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans repère orthonormé. (unité graphique : 2 cm).

1/Montrer que f est impaire 2/ Etudier les variations de f

3/ Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0. tracer (C) et T.

4/a/Montrer que f est bijective de $\Re$ sur un intervalle I à déterminer

. b/Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x ∈ I.

5/Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère.

Exercice n°31/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x)=x+2-e^x$

a) Dresser le tableau de variation de g
b) Montrer que l'équation g(x)=0 admet une unique solution α et que:$1,1<\alpha<1,2$
c) En déduire le signe de g(x)

2/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$

a) Montrer que : $\forall x \geq 0$ $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$ Dresser le tableau de variation de f
b) Montrer que $f(\alpha)=\frac{1}{1+\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$
c) Ecrire une équation de la demi tangente (T) à ζ_f au point d'abscisse 0.

3/ Tracer (T) et ζ_f courbe représentative de f dans un R .O.N $(o,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|=4cm$

4 / Montrer que : $\forall x \geq 0: f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ puis déduire une primitive F de f sur R+

Exercice N°4 On considère la fonction f définie par $f(x)=e^{-x^2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de $f$et montrer qu'elle est paire.

2) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement le résultat

3) Dresser le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$.

4) Tracer la courbe représentative (Cf) de f.

5) Soit g la restriction de f sur $[0,+\infty[$ a) Montrer que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle I à préciser b) Explicité $g^{-1}(x)$ pour tout x de I c) Construire ($\zeta_{g^{-1}}$)

Exercice N°5 : Soit f la fonction numérique définie sur IR par $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$

1°/ Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

2°/ Montrer que $f'(x) = -x^2e^{-x}$, $\forall x \in IR$ et dresser le tableau de variation de f

3°/ Dans un repère ortho normal $(O,\vec{i},\vec{j})$ unité graphique 2cm on note (C) la représentation graphique de f

a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à (C) au point d'abscisse (-1)

b) Tracer (C) et T dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

4°/ a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J dont on précisera

b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur J

c) Tracer (C') la courbe de f^{-1} dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

5°/ a) A l'aide d'une intégration par partie calculer $\int_0^{\lambda} 2(x+1)e^{-x}dx$ λ étant réel positif

b) Vérifier que $f'(x) + f(x) = 2(x+1)e^{-x}$

c) Calculer alors en cm² $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses la courbe (C) et les deux droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$

Exercice N°6 : I/Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x^2e^{x-1}$

1/Montrer que $g'(x) = -x(x+2)e^{x-1}$ puis dresser le tableau de variation de g

2/Calculer g(1) . En déduire le signe de g(x) sur [0 ; +∞ [.

II/Soit f la fonction définie sur] 0 ; +∞ [par $f(x) = (-x+1)e^{x-1} + \ln x$.

1/Montrer que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = -\infty$

2/a/Montrer que f est dérivable sur] 0 ; +∞ [

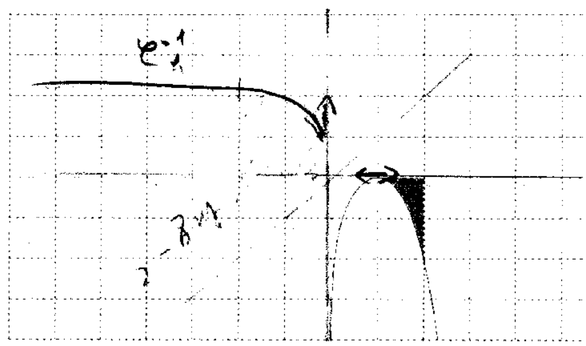
b/Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ puis dresser le tableau de variation de f

3/Montrer que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.Interpréter graphiquement le résultat

4/ Le graphique ci- joint (feuille à rendre) représente la courbe (C) de f

a/ A laide d'une intégration par partie ; calculer $\int_1^2 (-x+1)e^{x-1}\,dx$

b/ En déduire l'aire de la partie hachurée.



5/a/ Montrer que h la restriction de f à l'intervalle [1 ; +∞ [admet une fonction réciproque h^{-1} qu'on précisera son domaine

b/ Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur son domaine

c/ Tracer dans le même repère la courbe (C') de h^{-1}.

d/ Soit I= $\int_{\ln 2 - e}^{0} h^{-1}(x)dx$ ($f(2) = \ln 2 - e$) . Interpréter I graphiquement et déduire sa valeur

Exercice N°7 Soit f la fonction définie sur $\Re$ par $f(x)=x^2e^{-x}$

1/Etudier f et tracer sa courbe

2/Soit $I=\int_0^2 xe^{-x}dx$ et $J=\int_0^2 f(x)dx$

a/Vérifier que $f'(x)=2xe^{-x} - f(x)$

b/Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $I=1-3e^{-2}$

c/Calculer J et Interpréter graphiquement le résulta

Série n° 28

Ex n° 1 la moyenne de f sur $[a,b]$

$$\boxed{\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

1°)

$$\overline{f} = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= -\int_0^1 \left(\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}\right)dx \longrightarrow \frac{u'}{u}$$

$$\boxed{(e^{-x})' = (-x)' \times e^{-x} = -e^{-x}}$$

$$= -\left[\ln|e^{-x}+1|\right]_0^1$$

$$= -\left(\ln(e^{-1}+1) - \ln 2\right)$$

$$= -\left(\ln\left(\frac{e^{-1}+1}{2}\right)\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{\frac{1}{e}+1}{2}\right)$$

$$\boxed{e^{-1} = \frac{1}{e}}$$

$$= -\ln\left(\frac{1+e}{e}\times\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{1+e}{2e}\right)$$

$$\boxed{-\ln a = \ln\frac{1}{a}}$$

b

$$= \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)$$

2°)

$$V = \pi\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx \qquad \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

$$V = \pi\left[\ln|x|\right]_1^4$$

$$= \pi\left(\ln 4 - \underbrace{\ln 1}_{0}\right)$$

c

$$= \pi\ln 2^2 = 2\pi\ln 2$$

$$-\frac{1}{x^2} \longrightarrow \frac{1}{x} \longrightarrow \ln x \longrightarrow x\ln x - \ldots$$

3°)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^x\times\left(\frac{1}{e^x}+1\right)\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^x + \ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x + \ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\underbrace{1}_{\to 1} + \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}{x}}_{\to 0}$$

$$= 1$$

b

4) $$e^{-3\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = e^{-3\times -\ln 2}$$

$$= e^{3\ln 2} = e^{\ln 2^3}$$

$$= e^{\ln 8} = 8$$

b

5) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-e^x}{e^x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}\left(\frac{x}{e^x}-1\right)}{\cancel{e^x}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\underbrace{\frac{1}{\frac{e^x}{x}}}_{\to 0} - 1}{1+\underbrace{\frac{1}{e^x}}_{\to 0}} = -1$$

a

6) $$g'(x) = (x^2)'\times f(x^2)$$

$$= 2x \times \sqrt{x^2}\,e^{x^2-1}$$

$$= 2x\times x\,e^{x^2-1}$$

$$= 2x^2 e^{x^2-1}$$

b

d

Exo n° 2

1°) • $\forall x \in D_f = \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R} = D_f$

• $f(-x) = \dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$

$= \dfrac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1}$

$= \dfrac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}} = \dfrac{1-e^x}{1+e^x} = -f(x)$

alors f est impaire.

2°) $\left.\begin{array}{l} x \longmapsto e^x - 1 \\ x \longmapsto e^x + 1 \end{array}\right\}$ sont dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x + 1 \neq 0$

alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1) - (e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}$

$= \dfrac{\cancel{e^{2x}} + e^x - \cancel{e^{2x}} + e^x}{(e^x+1)^2}$

$= \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

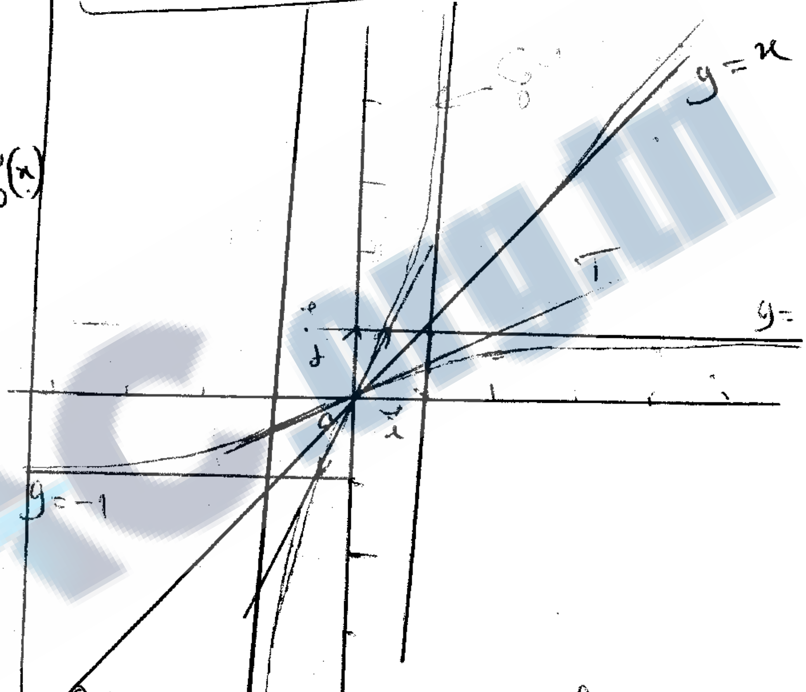
f est impaire il suffit d'étudier f sur $[0, +\infty[$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = 1$

3°) $T : y = \underbrace{f'(0)}_{\frac{1}{2}}(x - 0) + \underbrace{f(0)}_{0}$

$\boxed{T : y = \frac{1}{2}x}$



4°) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors elle est continue sur $\mathbb{R}$

f est continue et strict croissante alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[= I$

b) $\begin{cases} \forall x \in]-1, 1[\\ \forall y \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\quad f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

$f(y) = x$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^y - 1}{e^y + 1} = x$

$\Leftrightarrow e^y - 1 = xe^y + x$

$\Leftrightarrow e^y(1 - x) = 1 + x$

$e^y = \dfrac{1+x}{1-x} \Rightarrow y = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = f^{-1}$

Exn°3

1°/ a) $g(x) = x + 2 - e^x$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$g'(x) = 1 - e^x$

$g'(x) = 0 \iff e^x = 1$

$\iff x = \ln 1 = 0$

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$			
$g(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$\lim\limits_{+\infty} g = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$

$x \geq 0$

$e^x \geq e^0$

$e^x \geq 1$

$1 - e^x \leq 0$

b) g est continue sur $[0,+\infty[$ et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ alors g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $g([0,+\infty[) =]-\infty,1]$

$0 \in]-\infty,1]$ alors 0 admet un unique antécédent α par g.

Conclusion $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$

$g(1,1) = 0,09$

$g(1,2) = -0,12$

$\Rightarrow g(1,1) \times g(1,2) < 0$

alors $1,1 < \alpha < 1,2$

c)

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

2°) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$$f'(x) = \frac{e^x(xe^x+1) - (e^x + xe^x)(e^x - 1)}{(xe^x+1)^2}$$

$$= \frac{xe^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x - xe^{2x} + xe^x}{(xe^x+1)^2}$$

$$= \frac{2e^x - e^{2x} + xe^x}{(xe^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x(2 - e^x + x)}{(xe^x+1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$$

$\frac{e^x}{(xe^x+1)^2} > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(x + \frac{1}{e^x}\right)} = 0$

b) $f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1}$

or $g(\alpha) = 0$

$\iff \alpha + 2 - e^\alpha = 0$

$\iff e^\alpha = \alpha + 2$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1} = \frac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1}$$

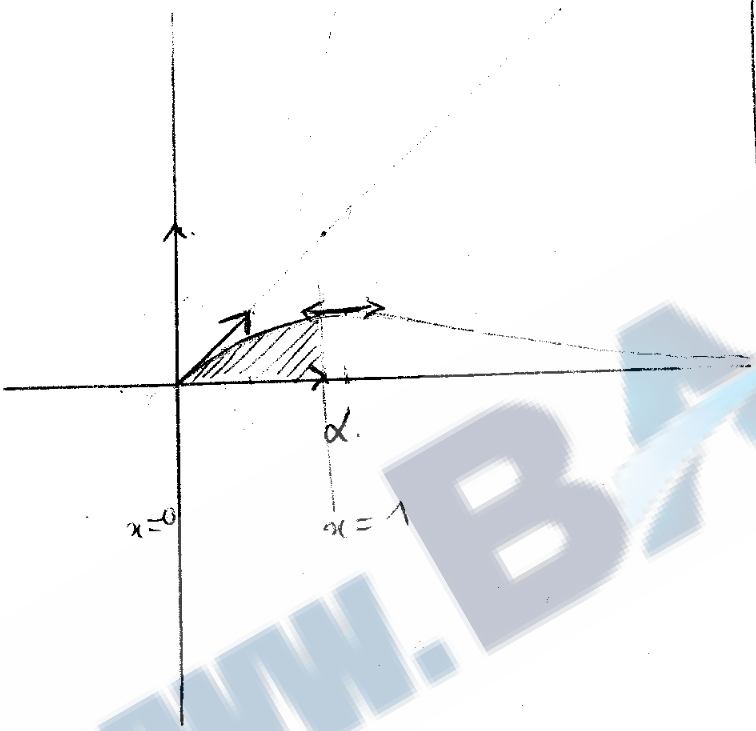
$$= \frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2} = \frac{1}{\alpha+1}$$

$$1,1 < \alpha < 1,2$$

$$2,1 < \alpha+1 < 2,2$$

$$\frac{1}{2,2} < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{2,1}$$

$$0,45 < \frac{1}{\alpha+1} < 0,47$$



c) $T : y = \underbrace{f'(0)}_{1}(x-0) + \underbrace{f(0)}_{0}$

$$\boxed{T : y = x}$$

4°) $$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x+1}$$

$$= \frac{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(x + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$$

$$f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}} \qquad \frac{u'}{u}$$

$$F(x) = \ln|x+e^{-x}|$$

Donner l'aire en cm² de la partie du plan limitée (C) [illegible] l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 0 et x = 1.

$$\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|\,dx \text{ u.a} \left(f(x) \geq 0 \ \forall x \in [0,1] \right)$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx \text{ u.a}$$

$$= \left[F(x)\right]_0^1 \text{ u.a}$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{e}\right) - \underbrace{\ln 1}_{0} \text{ u.a}$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{e}\right) \times 4 \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= 16 \ln\left(1+\frac{1}{e}\right)$$

Ex n°4

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad (e^x)^2 = e^{2x} \qquad e^{x^2} \neq e^{2x}$$

1°) $D_f = \mathbb{R}$

• $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$

• $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$

alors f est paire

2°) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$

C_f admet au $V(+\infty)$ une asymptote d'équation $y = 0$

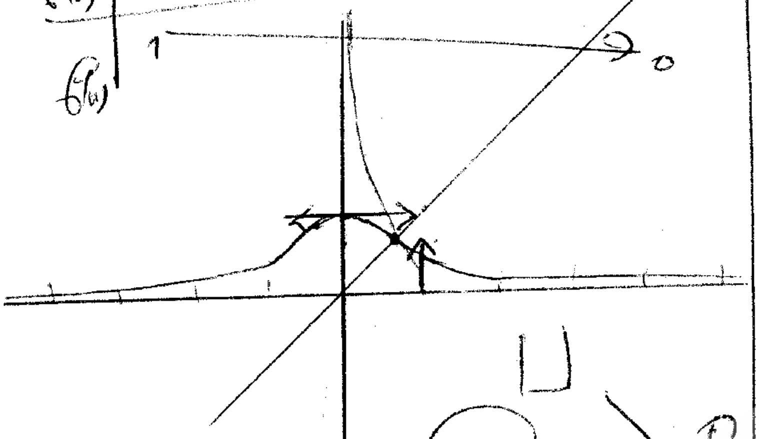
4

3°) $x \longmapsto -x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors $x \longmapsto e^{-x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = -2x\, e^{-x^2}$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0



$e^{\square} > 0$

5°) a) $g = f_{|[0,+\infty[}$

g est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ alors g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $g([0,+\infty[) =]0,1] = I$

b) $\begin{cases} \forall x \in]0,1] \\ \forall y \in [0,+\infty[\end{cases}$ $\quad g^{-1}(x) = y \iff g(y) = x$

$g(y) = x$

$\iff e^{-y^2} = x$

$\iff -y^2 = \ln x$

$\iff y^2 = -\ln x$

$y = \sqrt{-\ln x}$ ou $-\sqrt{-\ln x}$ à rejeter car $y > 0$

$g^{-1}(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$

Ex n°7

$f(x) = x^2 e^{-x}$

1°) $x \longmapsto -x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
alors $x \longmapsto e^{-x}$ " $\mathbb{R}$
et $x \longmapsto x^2$ est " $\mathbb{R}$
et $x \longmapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 2x\, e^{-x} + (-e^{-x}) \times x^2$

$f'(x) = (2x - x^2)\, e^{-x}$ $\quad e^{-x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \iff 2x - x^2 = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

• $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

alors $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$

• on calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x e^{-x} = -\infty$

$\longrightarrow$ $\mathcal{C}_f$ admet au $V(-\infty)$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées

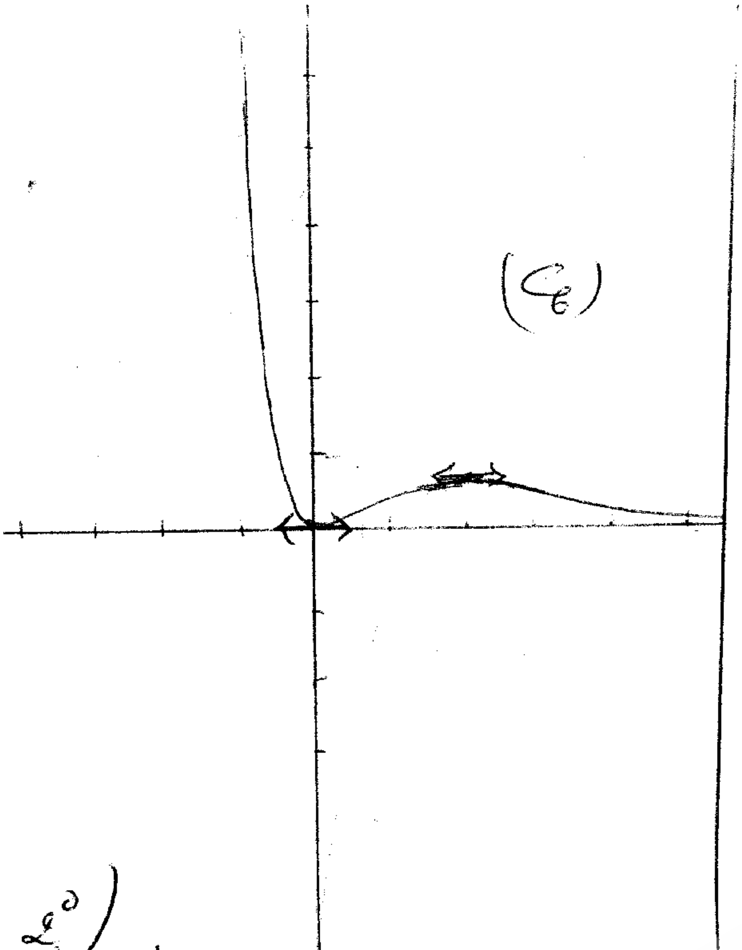
• $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{e^x}{x^2}}_{\to +\infty}} = 0$

ou bien $f(x) = (-x)^2 e^{-x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0$ $\Rightarrow$

$\lim\limits_{+\infty} f = 0$



2°) a) $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$

$f'(x) = 2xe^{-x} - \underbrace{x^2e^{-x}}$

$f'(x) = 2xe^{-x} - f(x)$

b) $I = \int_0^2 x e^{-x}\,dx$

on pose

$u(x) = x \longrightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x} \longrightarrow v(x) = -e^{-x}$

$I = \left[-x e^{-x}\right]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x}\,dx$

$= -2e^{-2} + 0 - \left[e^{-x}\right]_0^2$

$= -2e^{-2} - e^{-2} + 1$

$\boxed{I = 1 - 3e^{-2}}$

c/ $J = \int_0^2 f(x)\,dx$

$= \int_0^2 2xe^{-x} - f'(x)\,dx$

$= \int_0^2 2xe^{-x}\,dx - \int_0^2 f'(x)\,dx$

$= 2\underbrace{\int_0^2 x e^{-x}\,dx} - \left[f(x)\right]_0^2$

$= 2I - \underbrace{f(2)} + \underbrace{f(0)}_{0}$

$= 2(1 - 3e^{-2}) - 4e^{-2}$

$\boxed{= 2 - 10e^{-2}}$

J est l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.

Ex n°6

1°/ $g'(x) = -(2x e^{x-1} + x^2 e^{x-1})$

$= -(x^2 + 2x)e^{x-1}$

$= -x(x+2)\,e^{x-1} > 0$

$g'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -2$

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$1 - 4e^{-3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \underbrace{x^2e^{x}}_{\to 0} \times e^{-1} = 1$

$g(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II

1/ $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\left(-1+\frac{1}{x}\right)e^{x-1} + \frac{\ln x}{x}\right)$

et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -1+\frac{1}{x} = -1$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty$

alors $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$

2°) a) $x \longmapsto \ln x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$x \longmapsto x-1$ dérivable sur $]0,+\infty[$ alors

$x \longmapsto e^{x-1}$ ''

alors $x \longmapsto (-x+1)e^{x-1}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

d'où f est dérivable sur $]0,+\infty[$

b) $f'(x) = -1e^{x-1} + (x+1)e^{x-1} + \frac{1}{x}$

$= -e^{x-1} - xe^{x-1} + e^{x-1} + \frac{1}{x}$

$= \frac{-x^2e^{x-1}+1}{x} = \frac{g(x)}{x}$

on a $x>0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ alors $\lim\limits_{0} f = -\infty$

3°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\left(-1+\frac{1}{x}\right)e^{x-1}}_{-\infty} + \frac{\ln x}{x}$

$= -\infty$

alors C_f admet au voisinage de $(+\infty)$ une b.p de direction celle de l'axe des ordonnées

4°) a) $\int_1^2 (-x+1)e^{x-1}\,dx$

$u(x) = -x+1 \longrightarrow u'(x) = -1$

$v'(x) = 1e^{x-1} \longrightarrow v(x) = e^{x-1}$

$\int_1^2 (-x+1)e^{x-1}\,dx = \left[(-x+1)e^{x-1}\right]_1^2 + \int_1^2 e^{x-1}\,dx$

$= -e^{1} + \left[e^{x-1}\right]_1^2$

$= -e + e - 1 = -1$

b) $\mathcal{A} = \int_1^2 |f(x)|\,dx$ $\left(f(x)<0 \ \forall x\in[1,2]\right)$

$= -\int_1^2 (-x+1)e^{x-1} + \ln x\,dx$

$= -\underbrace{\int_1^2 (-x+1)e^{x-1}} - \int_1^2 \ln x\,dx$

$= 1 - \left[x\ln x - x\right]_1^2$

$= 1 - 2\ln 2 + 2 - 1$

$= 2 - 2\ln 2$ u.a

$h = f_{|[1,+\infty[}$

h est continue et strict décroissante sur $[1,+\infty[$ alors elle réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $f([1,+\infty[) =]-\infty,0]$ alors h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur $]-\infty,0]$.

$h'(1) = f'(1) = 0$

b) h est dérivable sur $[1,+\infty[$

$h'(x) \neq 0 \; \forall x \in]1,+\infty[$

alors h^{-1} est dérivable sur $h(]1,+\infty[) =]-\infty,0[$

Dérivabilité à gauche en 0 1ère méth

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{h^{-1}(x) - h^{-1}(0)}{x-0}$

$= \lim\limits_{y\to 1^+} \dfrac{y-1}{h(y)-h(1)}$

$= \lim\limits_{y\to 1^+} \dfrac{1}{\dfrac{h(y)-h(1)}{y-1}} = +\infty$

alors h^{-1} n'est pas dérivable à gauche en 0

2ème méth C_h admet au point $(1,0)$ une $\frac{1}{2}$ tangente horizontale alors $C_{h^{-1}}$ admet au point $(0,1)$ une $\frac{1}{2}$ tangente verticale d'où h^{-1} n'est pas dérivable à gauche en 0.

c/ $C_{h^{-1}} = S_\Delta(C_h)$ où $\Delta : y = x$.

d/

$I = \int_{\ln 2 - e}^{0} h^{-1}(x)\,dx$

I est l'aire de la partie du plan limitée par $C_{h^{-1}}$ l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x = \ln 2 - e$.

$I = \mathcal{A}_{OABC} - \mathcal{A}$

$= (e - \ln 2)\times 2 - (2 - 2\ln 2)$

$= 2e - 2\ln 2 - 2 + 2\ln 2$

$= 2e - 2$ u.a.