Lycée Gremda–Sfax- Série de révision n°5 Pr. Smaoui . N

4éme SC

Exercice N°1 Donner la réponse exacte

1/la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par f(x)=lnx-x est : a/croissante sur $]0,+\infty[$ b/décroissante sur $]0,+\infty[$ c/n'est pas monotone sur $]0,+\infty[$

2/$\lim_{x\to 1}\frac{lnx-x+1}{x-1}$ est égale à : a/0 b/1 c/2

3/$\lim_{n\to +\infty}\frac{1+2^n}{3+2^n}$ est égal à : a/$\frac{1}{3}$ b/1 c/$+\infty$

4/la suite (u_n) définie par $u_n=(\frac{e-1}{e})^n$, $\lim_{n\to +\infty}u_n$ est égale à : a/0 b/1 c/$+\infty$

5/$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$ est égale : a/0 b/1 c/2

6/$\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{1}{x\ln x}dx$ est égale à : a/ln2 b/-ln2 c/$\frac{3}{8}$

7/$\int_1^e \ln x\,dx$ est égale à : a/-1 b/e c/1

8/Une primitive sur IR de $\frac{x}{x^2+1}$ est : a/$\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ b/ $\ln(x^2+1)$ c/2 $\ln(x^2+1)$

9/la fonction f définie sur IR par f(x)=$\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt$ est

a/croissante sur IR b/décroissante sur IR c/n'est pas monotone sur IR

10/$\int_{-1}^{1}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$ est égale à a/0 b/2ln(e-e^{-1}) c/2ln(e+e^{-1})

11/$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$ est égale à a/0 b /$+\infty$ c/2

12/la fonction f définie sur IR par f(x)=(l-x) e^x

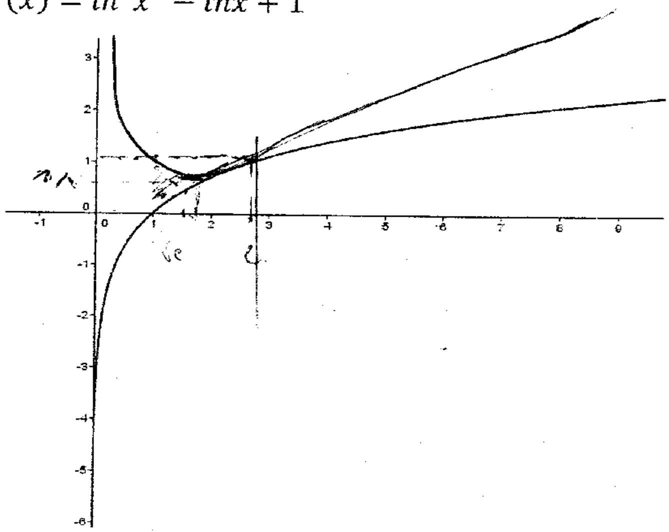
La valeur moyenne de f sur [0,1] est égale à a/-1 b/2-e c/e-2

Exercice N°2 On a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ La courbe (C) de la fonction ln

1/placer les points de C d'abscisses e et $\sqrt{e}$

2/Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=ln^2x - lnx+1$

(C_f)la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$



a)Montrer que $\lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$

b) Calculer $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}$ Interpréter graphiquement le résultat

c) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$ et que $f'(x)=\frac{2lnx-1}{x}$

d) Dresser le tableau de variation de f

3/a)Etudier la position de (C_f) et (C)

b)Tracer (C_f) dans le même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

4/A est l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C_f) les droites d'équations $x=1$et $x=$e a)Montrer que $\int_1^e ln^2x\,dx=e-2$ b)Calculer A

Exercice N°3 Soit la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x)=\cos x$

1/Justifier que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur[0,1]

2/ Soit g la fonction réciproque de f

a/Justifier que g est dérivable sur[0,1[

b/Montrer que pour tout réel x de [0,1[, $g'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3/a/Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g(\frac{\sqrt{3}}{2})$ b/Montrer que $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{6}$

Exercice N°4 I/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$

(C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

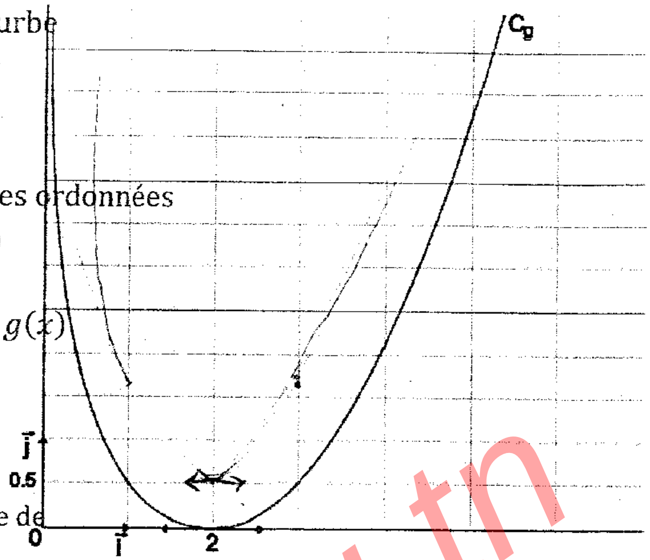
1/ Dresser le tableau de variation de f

2/En déduire que pour tout réel x ; $e^x - x \geq 1$

II/ Dans le graphique ci-dessous (C) est la courbe représentative d'une fonction g dérivable sur dans un repère orthonormé

- (C) admet au voisinage de $(+\infty)$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

-L'axe des ordonnées est une asymptote à (C)



par lecture graphique

1/a)déterminer g(1), g(2)et g(3) , $\lim_{x\to+\infty} g(x)$,$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ $\lim_{x\to 0^+} g(x)$

b)Déterminer le signe de g'(x)

2/ Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = e^{g(x)}$ et C $_h$ la courbe représentative de h dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

a)Calculer h (1), h(2)et h(3) b)justifier que $\lim_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

c)En écrivant $\frac{h(x)}{x} = \frac{e^{g(x)}}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{x}$ pour x>2 montrer que C $_h$ voisinage de $(+\infty)$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

d) Dresser le tableau de variation de h

3/soit $\alpha > 0$ on note M et N les points des courbes C $_h$ et(C) d'abscisse α

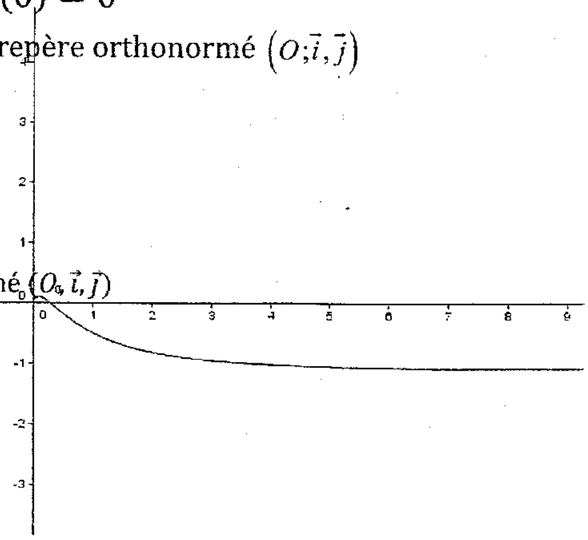
a)Calculer MN en fonction de $g(\alpha)$

b)Montrer que MN est minimal lorsque $\alpha = 2$

4/Tracer C $_h$ le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice N°5 Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$par : $\begin{cases} f(x) = -\frac{x^2+x\ln x+x}{(x+1)^2} \, si \; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On appelle (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$



1/a)Par lecture graphique donner le signe de f(x)

b)Montrer que $\ln\alpha = -(\alpha+1)$

2/ Soit g la fonction définie sur $[\alpha,+\infty[$ par $g(x) = \frac{x\ln x}{x+1} + 1$

(C_g) la courbe représentative de g dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$; $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

3/ a)Montrer que pour x de $[\alpha,+\infty[$ $g'(x) = -\frac{f(x)}{x}$

b) Dresser le tableau de variation de g

4/a)Montrer que $g(\alpha) = 1 - \alpha$

b)Construire le point de (C_g) d'abscisse α et tracer (C_g)

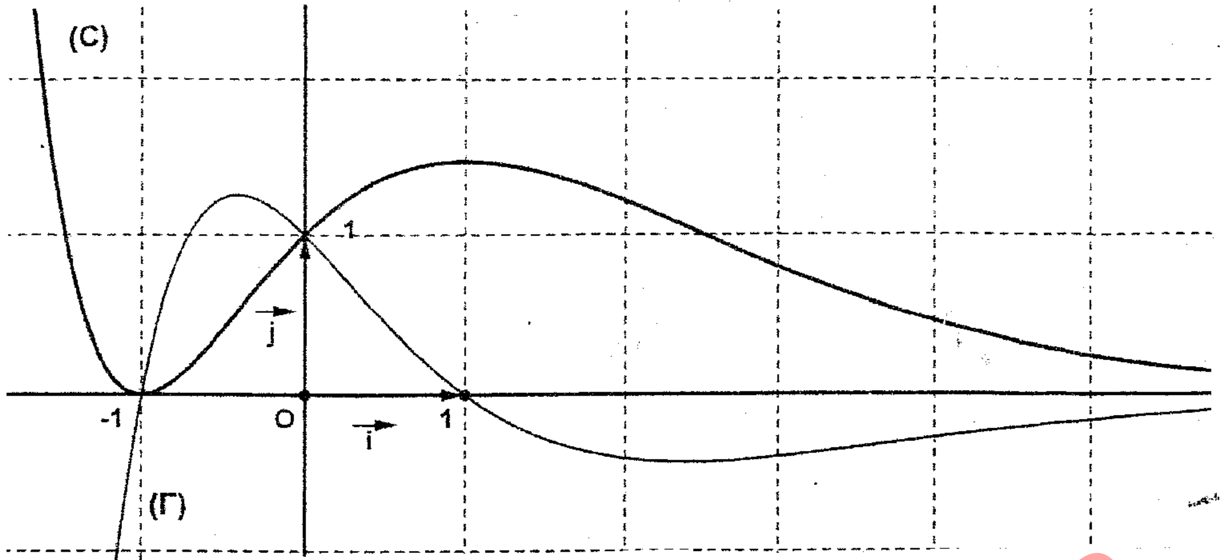
5/ A est l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C_g) et (C_f) les droites d'équations $x = 1 et\; x = \alpha$

a)Montrer en utilisant une intégration par parties que $\int_\alpha^1 f(x)dx = -[xg(x)]^1\alpha + \int_\alpha^1 g(x)dx$

b)En déduire que $A = \alpha^2 - \alpha + 1$

Exercice N°6

Dans un repère On a représenté les courbes C et les courbes de f et f'



1) Reconnaître la courbe représentative de f et celle de f'.

2) Déterminer f(0), f' (0), f(-1) et f' (-1).

3) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe de f', l'axe des abscisses et droites d'équations x = -1 et x = 0.

II) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2e^{-x}$.

1) a) A l'aide d'une double intégration par parties, montrer que $\int_0^{-1} f(x)\,dx = 2e - 5$

b) Déterminer l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan limitée par la courbe (C) et (Γ) et les droites d'équations x = –1 et x = 0.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle [1, +∞ [.

a) Montrer que g réalise une bijection de [1, +∞ [sur un J à préciser

b) Montrer que l'équation g(x) = x admet dans [1, +∞[une solution unique α et que 1,41 < α < 1,42.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable en α et que $(g^{-1})'(\alpha) = \frac{}{o}$ réciproque de g).

x	0	1	+∞
g-f	+∞	0	1

$(g^{-1})'(\alpha) = \dfrac{\alpha+1}{\alpha(1-\alpha)}$

<u>Exercice N°7</u> Soit f et g les fonctions définies sur]0, +∞[par : $f(x) = lnx - \frac{x-1}{x}$

Et $g(x)=(\frac{x-1}{x})lnx$

On désigne par(C_g) et (C_f) les courbes de g et f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/a/Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ Interpréter graphiquement le résultat

b/justifier que $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

2/ a/Montrer que f est dérivable sur]0, +∞[

Et que pour tout réel x de]0, +∞[, $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$

b/ Dresser le tableau de variation de f

3/On donne ci-contre, le tableau de variation de la fonction f-g

a/Préciser la position relative des courbes (C_g) et (C_f)

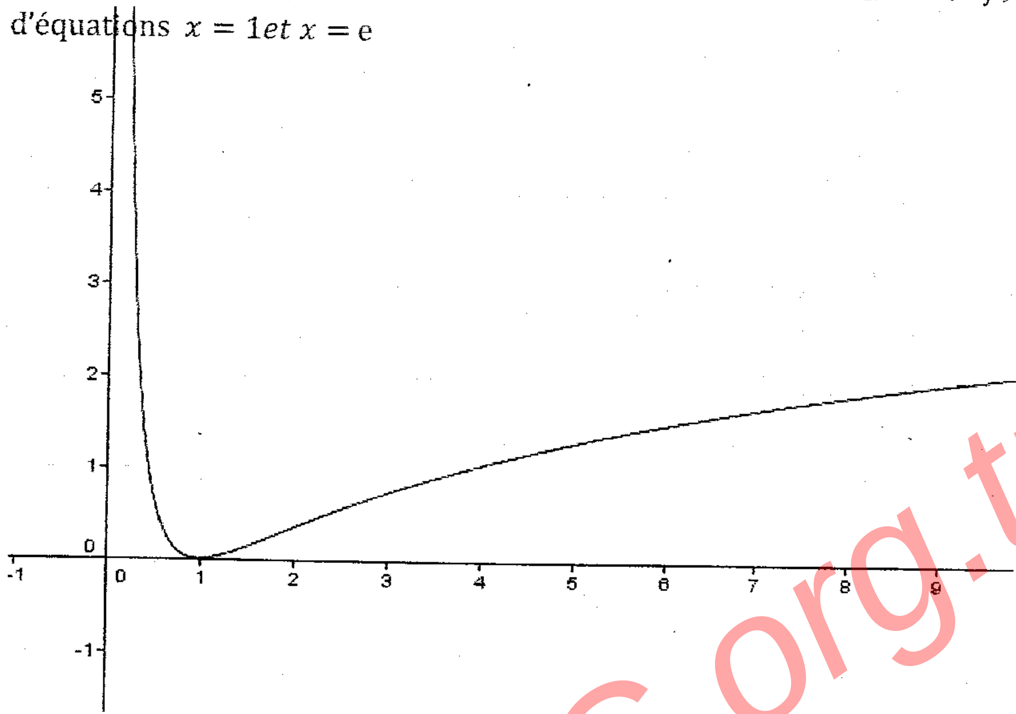
b/soit a un réel de]1, +∞[, M le point de la courbe (C_f) d'abscisse a et N le point de la courbe (C_g) de même abscisse a justifier que MN<1

4/Dans l'annexe ci-jointe ,on a tracer (C_g)

a/ tracer (C_f)

b/ Vérifier que pour tout réel x de $]0,+\infty[$ $g(x)-f(x)=1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}$

c/Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C_g) et (C_f) les droites d'équations $x=1$ et $x=e$



Exercice N°8 Soit la fonction f définie sur$[3,+\infty[$ par : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

E est la partie du plan limitée par la courbe (C) , les droites d'équations $x=3$ et $x=5$.

Et y=ln3 et A l'aire(en unité d'aire) de E

1/Hachurer E

2/ a)Vérifier f(5)=2 ln3

b) On note M et N les points de la courbe (C) d'abscisses respectives 3 et 5 et P et Q les points de coordonnées (5,ln3) et (3,2ln3)Placer les points M ,N ;P et Q

c)Calculer l'aire du rectangle MPNQ et l'aire du triangle MPN

d)En déduire ln3<A<2ln3

3/a)Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) En utilisant le graphique ,montrer que f réalise une bijection de$[3,+\infty[$ sur$[\ln 3,+\infty[$

4/Soit g la fonction réciproque de f et (C') sa courbe dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ tracer (C')

5/ E 'est la partie du plan limitée par la courbe (C) , les droites d'équations $x=\ln 3$ et $x=2\ln 3$ Et y=5 et A' l'aire(en unité d'aire) de E'

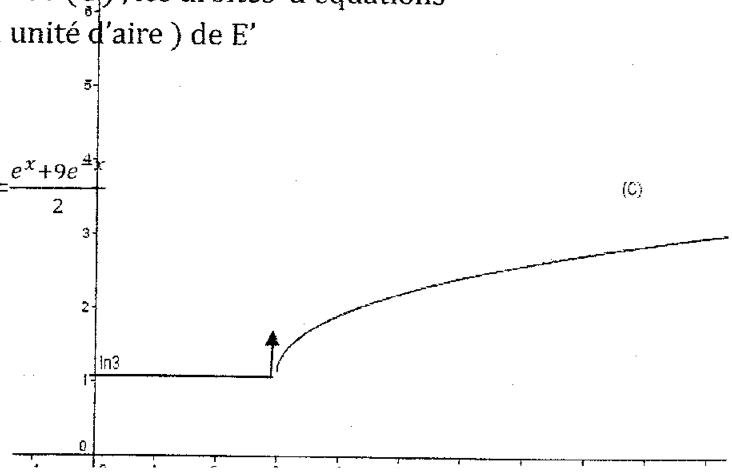
a)Hachurer E'

b)Montrer que $A'=5\ln 3-\int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)dx$

6/a) Montrer que pour $x\in[\ln 3,+\infty[$ $g(x)=\frac{e^x+9e^{-x}}{2}$

b)Calculer $\int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)dx$ et

en déduire la valeur de A



$f(x) = \ln x$

$D_f =]0, +\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

sa primitive

$F(x) = x\ln x - x$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0,\ r \in \mathbb{Q}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0,\ n \in \mathbb{N}$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln|u|$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\ln e = 1$

$\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

$\ln\frac{1}{a} = -\ln a$

Série n° 5

Ex n° 1

1°) $f(x) = \ln x - x$, $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ ⓒ

x	0		1	
$f'(x)$		+		−
$f(x)$		↗		↘

f n'est pas monotone sur $]0, +\infty[$.

2°) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} - 1 = 0$ ou $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\overbrace{(\ln x - x)}^{f(x)} - \overbrace{(-1)}^{f(1)}}{x-1} = f'(1) = 0$ ⓐ

3°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+2^x}{3+2^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2^x} + 1}{\frac{3}{2^x} + 1} = 1$ ⓑ

4°) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{e-1}{e}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{e-1}{e} = 1 - \frac{1}{e} < 1$ ⓐ

5°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)\right)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x} + \frac{\ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}{x} = 1$ ⓐ

6°) $\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{u'}}{(\ln x)_u}\,dx = \Big[\ln|\ln x|\Big]_{\sqrt{e}}^{e}$

$= \ln|\underbrace{\ln e}_{1}| - \ln|\underbrace{\ln\sqrt{e}}_{\frac{1}{2}}| = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$ ⓐ

7°) $\int_1^e \ln x\,dx = \Big[x\ln x - x\Big]_1^e = \underbrace{e\ln e - e}_{0} + 1 = 1$ ⓒ

8°) $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) \quad \frac{u'}{u}$ ⓐ

$F(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

9°) $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ une primitive de f et $F'(x) = f(x)$

$f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\,dt \Rightarrow f'(x) = \ln(1+x^2) > 0$

car $1+x^2 \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = e^x$

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$(e^{-x})' = -e^{-x}$

$(e^{ax})' = a e^{ax}$

$(e^{u})' = u' e^{u}$

$e^a . e^b = e^{a+b}$

10/ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)_{\frac{u'}{u}} dx = \left[e^x + e^{-x}\right]_{-1}^{1}$

$= e + e^{-1} - e^{-1} - e = 0$

(alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ si f impaire) ; f paire : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

11/ $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{2 e^{-x}}_{\to 2} \underbrace{\frac{e^{2x} - 1}{2x}}_{\to 1} = 2$

12/ $\displaystyle\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ | la valeur moyenne de f sur $[a,b]$

$\displaystyle\bar{f} = \frac{1}{1-0}\int_0^1 (1-x)e^x\,dx = \int_0^1 (1-x)e^x\,dx$

on pose $u(x) = 1 - x \longrightarrow u'(x) = -1$

$v'(x) = e^x \longrightarrow v(x) = e^x$

$\displaystyle\bar{f} = \left[(1-x)e^x\right]_0^1 + \int_0^1 e^x\,dx$

$= 0 - 1 + \left[e^x\right]_0^1 = -1 + e - 1 = e - 2$

$f \geq 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > 0$

Rq $(1-x)e^x \geq 0 \ \forall x \in [0,1]$ alors $\displaystyle\int_0^1 (1-x)e^x\,dx \geq 0$

et a) $-1 < 0$ et b) $2 - e < 0$ alors $\bar{f} = e - 2$

Ex n°2

1°) $\ln e = 1$ alors e est l'abscisse du point de $(C) : y = \ln x$ d'ordonnée 1

$\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$ alors $\sqrt{e}$ est l'abscisse du point de (C) d'ordonnée $\frac{1}{2}$

2°) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln^2 x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} -\ln x = +\infty$ } alors $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x(\ln x - 1) + 1 = \infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x - 1 = +\infty$

2

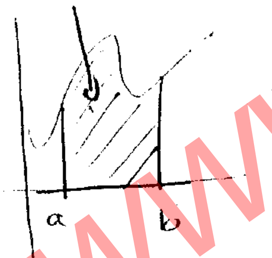
$\ln(x^n) = n\ln x$

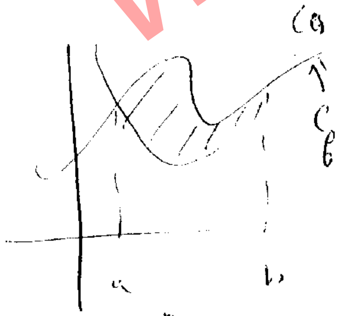
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^r} = 0$, $r \in \mathbb{Q}_+$

$\ln^2 x \neq \ln x^2$

$(f^n)' = n f' f^{n-1}$

$\int_a^b |f(x)|\,dx$





$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$

2°) b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^2 x - \ln x + 1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^2 x}{x} - \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x^{1/2}}\right)^2 - \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x} = 0$ $\left(\text{car } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{1/2}} = 0\right)$

alors $(\mathcal{C}_f)$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

c) $f'(x) = 2\dfrac{1}{x}\ln x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln x - 1}{x}$

d) $f'(x) = 0 \iff 2\ln x - 1 = 0 \iff \ln x = \frac{1}{2} \iff x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

$x > \sqrt{e}$
$\ln x > \frac{1}{2}$
$2\ln x - 1 > 0$

$f(\sqrt{e}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1$

3°) $f(x) - \ln x$

$= \ln^2 x - \ln x + 1 - \ln x$

$= \ln^2 x - 2\ln x + 1 = (\ln x - 1)^2$

$f(x) - \ln x = 0 \iff \ln x - 1 = 0 \iff x = e$

x		e	
$f(x) - \ln x$	$+$	0	$+$
position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (C)	$\mathcal{C}_f$ au dessus de (C)	$\mathcal{C}_f \cap (C) = \{(e,1)\}$	$\mathcal{C}_f$ au dessus de (C)

4°) b) $\mathcal{A} = \int_1^e f(x) - \ln x\,dx$ ($\mathcal{C}_f$ au dessus de (C))

$\mathcal{A} = \int_1^e \ln^2 x - 2\ln x + 1$

a) $\int_1^e \ln^2 x\,dx$ $\left(\text{on pose } u(x) = \ln^2 x \to u' = 2\frac{1}{x}\ln x,\ v'(x) = 1 \to v(x) = x\right)$

alors $\int_1^e \ln^2 x\,dx = \left[x\ln^2 x\right]_1^e - 2\int_1^e \ln x\,dx = e - 2$

$= e - 2\left[x\ln x - x\right]_1^e$

b/ $A=\int_1^e \ln^2 x - 2\ln x + 1 \, dx$

$= \int_1^e \ln^2 x - 2\int_1^e \ln x + \int_1^e 1 \, dx$

$= e-2 - 2\left[x\ln x - x\right]_1^e + \left[x\right]_1^e$

$= e - 2 - 2 + e - 1 = 2e - 5$ u.a.

Ex n°3 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

1°/ $f'(x) = -\sin x$

$f'(x) = 0 \iff \sin x = 0$ alors $x = 0$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

f est continue et strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

alors f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur

$f([0, \frac{\pi}{2}]) = [0, 1] = [f(\frac{\pi}{2}), f(0)]$

f bijection de I sur f(I)
sa fonction réciproque f^{-1} définie sur f(I)
$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$
$f \circ f^{-1}(y) = y, y \in f(I)$
$f^{-1} \circ f(x) = x, x \in I$
f continue sur I alors f^{-1} continue sur f(I)
f dérivable sur I, $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in I$ alors f^{-1} dérivable sur f(I) et $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)}$

2°/ f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}]$ alors $f^{-1} = g$

($f'(0) = 0$) est dérivable sur $f(]0, \frac{\pi}{2}]) = [f(\frac{\pi}{2}), \lim_0 f[= [0, 1[$

Etudier la dérivabilité de g à gauche en 1

$\mathcal{C}_f$ admet au point $(0,1)$ une ½ tangente horizontale
alors $\mathcal{C}_g$ admet au point $(1,0)$ " verticale
d'où g n'est pas dérivable à gauche en 1

$x \in [0, 1[$, $y \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{-1}{\sin y}$

$g(x) = y \iff f(y) = x$
$\cos y = x$

$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$
$\sin^2 y = 1 - x^2$
$\sin y = \sqrt{1 - x^2}$

d'où $g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

3°/a/ $g\left(\frac{1}{2}\right) = x$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

alors $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

b/ $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} -g'(x)\,dx$

$= -\left[g(x)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = g\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

Ex n° 4 I)

1°/ $f(x) = e^x - x$

$f'(x) = e^x - 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x - x = +\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$

2) f admet un minimum absolu en 0 alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq f(0)$

$e^x - x \geq 1$

II

1°) a) $g(1) = \frac{1}{2}$

$g(2) = 0$

$g(3) = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{0^+} g = +\infty$

b)

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

2°) a) $h(x) = e^{g(x)}$

$h(1) = e^{g(1)} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

$h(2) = e^{g(2)} = e^0 = 1$

$h(3) = e^{g(3)} = \sqrt{e}$

b) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+} g = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to0^+} h(x) = +\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} g = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{g(x)}}{g(x)} \times \frac{g(x)}{x}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{g(x)}}{g(x)} = +\infty$

et graphiquement $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$

alors $\lim\limits_{+\infty} h = +\infty$

alors C_h admet au $V(+\infty)$ une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$

d) $h(x) = e^{g(x)}$

$h'(x) = g'(x)\, e^{g(x)}$

le signe de h' est celui de g'

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3°) $M \in C_h$, $x_M = \alpha$

$M(\alpha, h(\alpha))$

$N \in C = C_g$, $x_N = \alpha$

$N(\alpha, g(\alpha))$

$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$

$= \sqrt{\underbrace{(\alpha-\alpha)^2}_{0} + (g(\alpha) - h(\alpha))^2}$

$= |g(\alpha) - h(\alpha)|$

$= |g(\alpha) - e^{g(\alpha)}|$

$\ell(\alpha) = MN = e^{g(\alpha)} - g(\alpha)$ ($e^X - X > 0$ d'après 1°)

$\ell'(\alpha) = g'(\alpha)\, e^{g(\alpha)} - g'(\alpha)$

$= g'(\alpha)\left(e^{g(\alpha)} - 1\right)$

$\ell'(\alpha) = 0 \iff g(\alpha) = 0$ ou $e^{g(\alpha)} = 1$

$g(\alpha) = 0$

$\Rightarrow \alpha = e$

α	0		e		$+\infty$
$g'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$e^{g(\alpha)} - 1$		$+$	0	$+$	
$\ell'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$\ell(\alpha)$		$\searrow$		$\nearrow$	

alors MN est minimal pour $\alpha = e$

(6)

Ex n°-6 I_0 1)

On suppose (C) est celle de f
alors (Γ) " f

ma (Γ) est la courbe d'une fonction décroissante sur [0, 1]
alors sa dérivée est négative sur [0, 1]
ce que contredit que (C) est au dessus de $(o,\vec{i})$ est celui d'une fonction positive
d'où ma supposition est fausse alors
$\Gamma = \mathscr{C}_{f'}$ et $(C) = \mathscr{C}_f$.

2°)
$f(0) = 1$ $f(-1) = 0$
$f'(0) = 1$ $f'(-1) = 0$

3) $A = \int_{-1}^{0} |f'(x)|\, dx = [f(x)]_{-1}^{0}$
$= f(0) - f(-1) = 1 - 0 = 1$ u.a

II) on pose $u(x) = (x+1)^2 \rightarrow u'(x) = 2(x+1)$
$v'(x) = e^{-x} \rightarrow v(x) = -e^{-x}$

$I = \int_{-1}^{0} f(x)dx = \left[-e^{-x}(x+1)^2\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} 2e^{-x}(x+1)\,dx$
$= -1 + 2\int_{-1}^{0} (x+1)e^{-x}dx$

on pose $u(x) = x+1 \rightarrow u'(x) = 1$
$v'(x) = e^{-x} \rightarrow v(x) = -e^{-x}$

alors $\int_{-1}^{0} (x+1)e^{-x}dx$
$= \left[-(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^{-x}dx$
$= -1 + \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0}$
$= -1 - 1 + e = e - 2$

alors $I = -1 + 2(e-2)$
$\underline{I = 2e - 5}$

b) $A = \int_{-1}^{0} |f(x) - f'(x)|\, dx$
$= \int_{-1}^{0} f'(x) - f(x)\, dx$
$= \int_{-1}^{0} f'(x) - \int_{-1}^{0} f(x)\, dx$
$= 1 - 2e + 5 = 6 - 2e$ u.a.

2°) a) g est la restriction de f à $[1, +\infty[$
alors g est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$
d'où g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $g([1, +\infty[)$
$= \left]0, \frac{4}{e}\right] = J$.

b) on pose
$h(x) = g(x) - x$.
$g(x) = x \Leftrightarrow h(x) = 0$

(4)

$h'(x) = g'(x) - 1$ or $g'(x) < 0$ ($g \searrow$ sur $[1,+\infty[$)

alors $h'(x) < 0$

d'où h est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ et comme

$\left.\begin{array}{l} x \longmapsto g(x) \\ x \longmapsto -x \end{array}\right\}$ sont continues sur $[1,+\infty[$ alors h est continue sur $[1,+\infty[$

d'où h réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $h([1,+\infty[)$

$]\lim_{+\infty} h, h(1)]$

$=]-\infty, \underbrace{\frac{4}{e}-1}_{>0}]$

$0 \in]-\infty, \frac{4}{e}-1]$ alors

0 admet un unique antécédent α par h

d'où l'équation $h(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=x$ admet une unique solution α dans $[1,+\infty[$

$h(1{,}41) = 0{,}008$

$h(1{,}42) = -0{,}004$

$h(1{,}41) \times h(1{,}42) < 0$

alors $1{,}41 < \alpha < 1{,}42$

c) $g(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow g^{-1}(\alpha) = \alpha$

g est dérivable sur $[1,+\infty[$ en particulier en α.

et $g'(\alpha) \neq 0$

alors g^{-1} est dérivable en $g(\alpha) = \alpha$.

et $(g^{-1})'(\alpha) = \dfrac{1}{g'(\underbrace{g^{-1}(\alpha)}_{\alpha})}$

$= \dfrac{1}{g'(\alpha)}$

or $g'(x) = 2(x+1)e^{-x} + (x+1)^2 \times (-e^{-x})$

$= (x+1)e^{-x}(2 - x - 1)$

$= (1-x^2)e^{-x}$

$\Rightarrow (g^{-1})'(\alpha) = \dfrac{1}{(1-\alpha^2)e^{-\alpha}}$

or $g(\alpha) = \alpha$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)^2 e^{-\alpha} = \alpha$

$\Leftrightarrow e^{-\alpha} = \dfrac{\alpha}{(\alpha+1)^2}$

$(g^{-1})'(\alpha) = \dfrac{1}{(1-\alpha^2) \times \dfrac{\alpha}{(\alpha+1)^2}}$

$= \dfrac{\alpha+1}{\alpha(1-\alpha)}$