

Exercice 1

1) On donne :  $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z(z+3)}$

Ecrire sous forme algébrique les nombres suivants :  $f(1-i)$  et  $f(1+i)$

2) Ecrire sous forme algébrique :  $(2+i)^3 + (1-2i)^3$

3) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes :

a)  $3(z-i) - 3i(z-2+3i) = (i-1)(z+i)$

b)  $z^2 - 2z + 17 = 0$

c)  $z - 2\bar{z} = 9 + 2i$

4) Pour tout nombre complexe  $z \neq i$  On pose  $Z = \frac{z-1+2i}{z-i}$

a) Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$  pour lesquels  $M'(Z)$  appartient à l'axe des réels.

b) Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$  pour lesquels  $M'(Z)$  appartient à l'axe des imaginaires.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  (unité graphique : 4 cm)

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives  $a=2i$ ;  $b=1$  et  $c=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ .

On note I le milieu de [A'B], J celui de [B'C], K celui de [C'A]

On considère l'application f du plan, qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel

que  $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z$ .

1) a) Déterminer les affixes  $a', b'$  et  $c'$  des points A', B', C' images des points A, B et C par f.

b) Déterminer les affixes des points I, J, K.

2) Calculer les affixes des vecteurs :  $\vec{IJ}$ ,  $\vec{IK}$  et  $\vec{KJ}$ .

3) Montrer que le triangle IJK est équilatéral.

4) Soit  $E_1$  l'ensemble des points M d'affixes z tels que :  $|z-2i|=2$ .

a) Déterminer et construire l'ensemble  $E_1$ .

b) Déterminer et construire l'image  $E'_1$  de  $E_1$  par l'application f.

c) Donner une équation cartésienne de  $E'_1$ .

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (1) :  $\frac{z-2}{z-1} = z$ .

On donnera le module et un argument de chaque solution.

2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (2) :  $\frac{z-2}{z-1} = i$ .

On donnera la solution sous forme algébrique.

3) Soit M, A et B les points d'affixes respectives : z, 1 et 2.

On suppose que M est distinct des points A et B.

a) Interpréter le module et l'argument de  $\frac{z-2}{z-1}$ .

b) Retrouver géométriquement la solution de l'équation (2).

3)a) Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution de l'équation dans  $\mathbb{C}$  :

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i, \text{ où } n \text{ désigne un entier naturel non nul, a pour partie réelle } \frac{3}{2}.$$

b) Résoudre alors dans  $\mathbb{C}$  l'équation (3) :  $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i$ . On cherchera les solutions sous forme algébrique.

Exercice 4

1) Ecrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

$$z = i ; z = 1-i ; z = i-\sqrt{3} ; z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{-1-i}{i}\right) ; z = \sqrt{2} \left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right) ; z = \left(\frac{i}{1-i}\right)^4.$$

2) Déterminer et construire graphiquement l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a)  $\arg(z + 1) \equiv \pi/2 \pmod{2\pi}$ .

b)  $\arg(3i - z) = 0 \pmod{2\pi}$ .

c)  $\arg((1+i)z + 1) \equiv \pi \pmod{2\pi}$ .

Exercice 5

On donne les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 5\sqrt{2}(1+i) \text{ et } z_2 = -5(1+i\sqrt{3}).$$

- 1) Déterminer le module et un argument des nombres complexes :  $z_1, z_2, \bar{z}_1, \frac{1}{z_1}$ .
- 2) Soit  $Z$  le nombre complexe tel que  $z_1 Z = z_2$ .  
Ecrire  $Z$  sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
- 3) Déduisez-en les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ .

Exercice 6

- 1) Soit ABC un triangle, I le milieu de [BC] et D le barycentre des points (A ; -1)(B ; 2)(C ; 2).
- a) Exprimer  $\overrightarrow{AD}$  en fonction de  $\overrightarrow{AI}$ . Placer le point D sur la figure.
- b) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

Justifier que cet ensemble contient le point I.

- 2) Le plan (P) est ici rapporté à un repère orthonormé direct  $(o, \vec{u}, \vec{v})$ . Dans cette question A est le point d'affixe 1, B celui d'affixe  $2i$ . L'affixe de C est notée  $z$ .

- a) Que représente géométriquement  $\left|\frac{z-2i}{1-2i}\right|$  et  $\arg\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)$  ?

Dans toute la suite, on désigne par  $\alpha$  le réel de  $]-\pi, 0]$  tel que  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ . Le point C est défini

$$\text{par : } (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \alpha \text{ et par } BC = \sqrt{\frac{2}{5}} BA.$$

- b) Calculer la valeur exacte de  $\sin \alpha$ .
- c) Démontrer que  $\frac{z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5}$  ; en déduire  $z$ , et placer C.
- d) Vérifier que le triangle ABC est isocèle en A.

Exercice 7

A tout nombre complexe  $z = x + iy$  où  $x$  désigne la partie réelle et  $y$  la partie imaginaire de  $z$ , on associe le nombre complexe  $f(z) = e^y (\cos(\pi x) + i \sin(\pi x))$ .

1) Déterminer et placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct  $(o; \vec{u}; \vec{v})$ , les points d'affixes  $f(0), f(i), f(-i), f(1+i)$  et  $f(1-i)$

2) Pour tout nombre complexe  $z = x + iy$ , démontrer que  $f(z)$  est non nul, puis déterminer en fonction de  $x$  et de  $y$  le module et un argument de  $f(z)$ .

3) a) Démontrer que pour tous les nombres complexes  $z$  et  $z'$  :  $f(z+z') = f(z)f(z')$  et  $f(z-z') = \frac{f(z)}{f(z')}$

b) Démontrer que pour tout entier relatif  $n$ , pour tout nombre complexe  $z$ ,  $f(nz) = (f(z))^n$ .

4) Soit A le point du plan d'affixe  $w = 1 + i$ . B, C et D les points d'affixes respectives  $\bar{w}, -w$  et  $-\bar{w}$ .

a) Déterminer l'ensemble L des points du plan dont l'affixe  $z = x + iy$  vérifie  $\begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| = 1 \end{cases}$

puis déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe  $f(z)$ , où  $z$  est l'affixe d'un élément de L.

b) Déterminer l'ensemble K des points du plan dont l'affixe  $z = x + iy$  vérifie  $\begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \end{cases}$

puis déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe  $f(z)$ , où  $z$  est l'affixe d'un élément de K.

Exercice 8

$z$  et  $z'$  sont deux nombres complexes et on pose :  $\varphi(z, z') = z\bar{z}' + \bar{z}z'$ .

$\bar{z}$  et  $\bar{z}'$  désignent les conjugués respectifs de  $z$  et  $z'$ .

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (unité graphique 2 cm).

1. Calculer :  $\varphi(i, 3)$  ;  $\varphi(1+2i, -2+i)$ ,  $\varphi(2+i, -3+2i)$ ,  $\varphi(e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{2\pi}{3}})$ .

Montrer que pour tout couple  $(z, z')$  le nombre  $\varphi(z, z')$  est réel.

2. a) On pose  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  ;  $x, y, x', y'$  réels.

Calculer  $\varphi(z, z')$  en fonction de  $x, x', y, y'$ .

b) Déterminer l'ensemble  $D$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $\varphi(z, 1+i) = 2\sqrt{2}$ .

Dessiner  $D$  dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

3. a) On pose  $z = re^{i\theta}$  et  $z' = r'e^{i\theta'}$  ;  $\theta$  et  $\theta'$  réels,  $r$  et  $r'$  réels positifs.

Calculer  $\varphi(z, z')$  en fonction de  $r, r'$  et  $\cos(\theta - \theta')$ .

b) Exprimer  $\varphi(z, z)$  en fonction de  $r$ .

Déterminer l'ensemble  $C$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $\varphi(z, z) = 2$ .

Dessiner  $C$  dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

Que peut-on dire de la position relative de  $C$  et  $D$  ? Justifier la réponse.

**Exercice 9** : Les parties A et B sont indépendantes.

On considère l'équation (E) :  $z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = 0$  où  $z$  désigne un nombre complexe.

**Partie A :**

1. a. Montrer que (E) admet une solution réelle, notée  $z_1$ .
  - b. Déterminer les deux nombres complexes  $\alpha$  et  $\beta$  tels que, pour tout nombre complexe  $z$ , on ait :
  - c.  $z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = (z - z_1)(z - 2 - 2i)(\alpha z + \beta)$
2. Résoudre (E)

**Partie B :**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives  $a = 1$ ,  $b = 2 + 2i$  et  $c = 1 - i$ .

1. Représenter A, B et C.
2. a. On considère les points M et M' d'affixes respectives  $z$  et  $z'$ .  
Montrer que les vecteurs  $\vec{OM}$  et  $\vec{OM'}$  sont orthogonaux si et seulement si  $\operatorname{Re}\left(z' \overline{z}\right) = 0$ .
- b. En déduire la nature du triangle OBC.
3. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifier votre affirmation.
4. Déterminer la valeur du complexe  $d$  tel que le complexe  $\frac{c-d}{c}$  ait pour module 1 et pour argument  $-\frac{\pi}{2}$ .
5. On note D le point d'affixe  $d$  : quelle est la nature du quadrilatère OCDB ?

Exercice 1

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z(z+3)}$$

$$1) f(1-i) = \frac{(1-i)^2 - 1}{(1-i)(1-i+3)} = \frac{1-2i-1-1}{4-i-4i^2-1} = -\frac{(1-2i)(3+5i)}{(3-5i)(3+5i)} = \frac{7}{34} - \frac{11}{34}i$$

$$f(\bar{z}) = \frac{\bar{z}^2 - 1}{\bar{z}(\bar{z}+3)} = \frac{\overline{z^2 - 1}}{\overline{z(z+3)}} = \overline{\left(\frac{z^2 - 1}{z(z+3)}\right)} = \overline{f(z)}$$

$$\text{Donc } f(1+i) = f(\overline{1-i}) = \frac{7}{34} + \frac{11}{34}i$$

$$2) u = (2+i)^3 + (1-2i)^3 = 8+12i-6-i+1-6i-12-8i = -9-2i$$

$$3) a) 3(z-i) - 3i(z-2+3i) = (i-1)(z+1) \Leftrightarrow 3z - 3iz - iz + z = i - 1 - 3i - 9$$

$$\Leftrightarrow z(4-4i) = -10-2i \Leftrightarrow z = \frac{-10-2i}{4-4i} = \frac{-5-2i}{2(1-i)} = -\frac{1}{2} \frac{(5+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -\frac{3}{4} - \frac{7}{4}i$$

$$b) z^2 - 2z + 17 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 4 - 68 = -64 = (8i)^2$$

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées:

$$z_1 = \frac{4-8i}{2} = 2-4i \quad z_2 = \bar{z}_1 = 2+4i$$

$$c) z - 2\bar{z} = 9 + 2i \text{ Pour résoudre cette équation on pose: } z = x + iy, \bar{z} = x - iy$$

$$z - 2\bar{z} = 9 + 2i \Leftrightarrow -x + 3iy = 9 + 2i \Leftrightarrow x = -9 \text{ et } y = \frac{2}{3} \text{ d'où } \boxed{z = -9 + \frac{2}{3}i}$$

$$4) Z = \frac{z-1+2i}{z-i} \text{ avec } z \neq i. \text{ On pose } z = x + iy \text{ et } Z = X + iY$$

a) Ensemble des points M(z) pour lesquels Le point M'(Z) appartient à l'axe des réels (E1)

1<sup>ère</sup> méthode: On exprime X, Y en fonction de x et y

$$X + iY = \frac{x+iy-1+2i}{x+iy-i} = \frac{(x-1)+i(y+2)}{x+i(y-1)} = \frac{(x-1)+i(y+2)}{x+i(y-1)} \times \frac{x-i(y-1)}{x-i(y-1)}$$

après simplification, on obtient:

$$X + iY = \frac{x^2 - x + y^2 + y - 2}{x^2 + (y-1)^2} + i \frac{3x + y - 1}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$\text{D'où } \boxed{\text{Re}(Z) = X = \frac{x^2 - x + y^2 + y - 2}{x^2 + (y-1)^2}} \text{ et } \boxed{\text{Im}(Z) = Y = \frac{3x + y - 1}{x^2 + (y-1)^2}}$$

$$M' \text{ appartient à l'axe des réels signifie que } \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x + y - 1}{x^2 + (y-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 1 = 0$$

Les points M sont donc sur la droite  $\Delta$  d'équation  $3x + y - 1 = 0$  privé du point A d'affixe  $z = i$ .

2<sup>ème</sup> méthode: utilisation des arguments

M' appartient à l'axe des réels signifie que  $\arg(Z) = k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$

Soit B le point d'affixe  $z_B = 1 - 2i$

$$\arg Z = \arg\left(\frac{z-1+2i}{z-i}\right) (2\pi) \Leftrightarrow \arg Z = \arg\left(\frac{z-(1-2i)}{z-i}\right) = \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) (2\pi)$$

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) &= \arg(z-z_A) - \arg(z-z_B) \pmod{2\pi} \\ &= (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) - (\vec{u}; \overrightarrow{BM}) \pmod{2\pi} \\ &= (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

d'où  $\arg(Z) = k\pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) = k\pi \Leftrightarrow$  les points  $M, A$  et  $B$  sont alignés.

(E1) est la droite (AB) privé du point A.

b) Ensemble des points  $M(z)$  pour lesquels Le point  $M'(Z)$  appartient à l'axe des imaginaires (E2)

1<sup>ère</sup> méthode:  $\boxed{\operatorname{Re}(Z) = X = \frac{x^2 - x + y^2 + y - 2}{x^2 + (y-1)^2}}$  et  $\boxed{\operatorname{Im}(Z) = Y = \frac{3x + y - 1}{x^2 + (y-1)^2}}$

$M'(Z)$  appartient à l'axe des imaginaires signifie que  $\operatorname{Re}(Z) = 0$ .

$$\Leftrightarrow X = \frac{x^2 - x + y^2 + y - 2}{x^2 + (y-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}}$$

On reconnaît l'équation cartésienne du cercle  $\Gamma$  de centre le point  $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$  et de rayon  $r = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ .

L'ensemble (E2) est le cercle  $\Gamma$  privé du point  $A(i)$ .

2<sup>ème</sup> méthode: utilisation des arguments

$M'$  appartient à l'axe des imaginaires signifie que  $\arg Z = \frac{\pi}{2} + k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$

Soit B le point d'affixe  $z_B = 1 - 2i$

$$D'après a) \arg Z = \arg\left(\frac{z-1+2i}{z-i}\right) = \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) \pmod{2\pi}$$

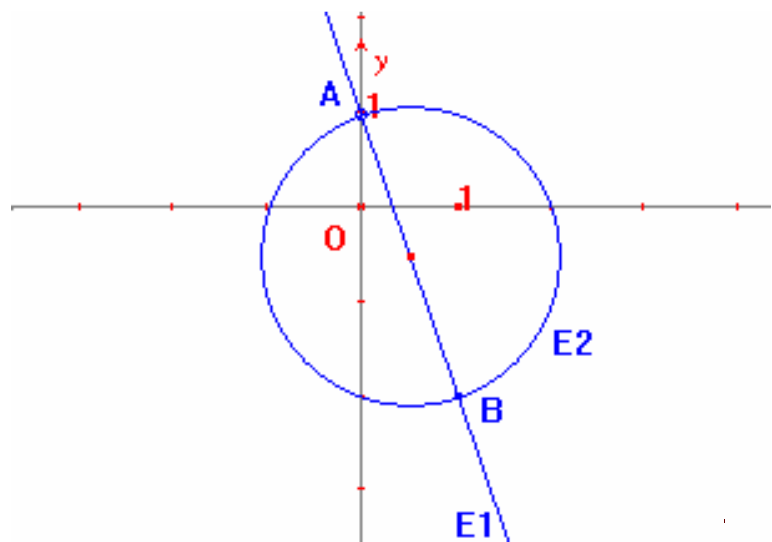
$$\arg Z = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \text{le triangle } AMB \text{ est rectangle en } M.$$

Donc l'ensemble cherché est le cercle de diamètre  $[AB]$  privé du point A.

Ce cercle a pour centre le point I milieu du segment  $[AB]$ ,  $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{i + 1 - 2i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ .

Soit  $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ . On retrouve bien le résultat de la première méthode.

Construction des ensembles de points E1 et E2



Exercice 2a) Affixes des points  $A', B', C'$ 

$$a = 2i \quad b = 1 \quad c = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad I = \text{mil}[A'B], \quad J = \text{mil}[B'C], \quad K = \text{mil}[C'A]$$

$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ tel que } f(M) = M' \Leftrightarrow z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z$$

$$1) f(A) = A' \Leftrightarrow a' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} a \Leftrightarrow a' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \times 2i \Leftrightarrow \boxed{a' = -\sqrt{3} + i}$$

$$f(B) = B' \Leftrightarrow b' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} b \Leftrightarrow \boxed{b' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}}$$

$$f(C) = C' \Leftrightarrow c' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow \boxed{c' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$$

b) Affixes des points  $I, J, K$  :

$$z_I = \frac{a'+b}{2} = \frac{1}{2} \left( -\sqrt{3} + i + \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) \Leftrightarrow \boxed{z_I = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$$

$$\boxed{z_J = \frac{b'+c}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad z_K = \frac{c'+a}{2} \Leftrightarrow \boxed{z_K = -\frac{1}{4} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}$$

2) Affixes des vecteurs :  $\vec{IJ}, \vec{IK}, \vec{KJ}$  :

$$Z_{\vec{IJ}} = z_J - z_I \Leftrightarrow Z_{\vec{IJ}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \Leftrightarrow \boxed{Z_{\vec{IJ}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$Z_{\vec{IK}} = z_K - z_I \Leftrightarrow \boxed{Z_{\vec{IK}} = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}; \quad Z_{\vec{KJ}} = z_J - z_K \Leftrightarrow \boxed{Z_{\vec{KJ}} = \frac{3}{4} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}$$

3) montrons que IJK est équilatéral

$$Z_{\vec{IJ}} \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = Z_{\vec{IK}}$$

$$\text{On a donc } Z_{\vec{IK}} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times Z_{\vec{IJ}}$$

$$\text{D'une part } |Z_{\vec{IK}}| = \left|\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| \times |Z_{\vec{IJ}}| \Leftrightarrow \boxed{IK = IJ} \text{ car } \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$$

$$\text{d'autre part } \arg(Z_{\vec{IK}}) = \arg\left[\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times Z_{\vec{IJ}}\right] = \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arg(Z_{\vec{IJ}}) \quad (2\pi)$$

$$\Leftrightarrow \arg(Z_{\vec{IK}}) - \arg(Z_{\vec{IJ}}) = \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (2\pi) \quad ; \quad \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$$

$$\arg(Z_{\vec{IK}}) - \arg(Z_{\vec{IJ}}) = (\vec{u}; \vec{IK}) - (\vec{u}; \vec{IJ}) = (\vec{IJ}; \vec{IK}) \quad (2\pi). \quad \text{Ainsi } \boxed{(\vec{IJ}; \vec{IK}) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)}.$$

Donc le triangle IJK à deux côtés égaux et un angle égale à  $\frac{\pi}{3}$ , il est équilatéral.

Autre méthode: calcul des longueurs: IJ, IK et KJ.

4) Soit  $E_1$  l'ensemble des points M d'affixes  $z$  tels que:  $|z-2i|=2$

a)  $|z-2i|=2 \Leftrightarrow |z-z_A|=2 \Leftrightarrow \boxed{AM=2}$ ,  $E_1$  est donc le cercle de centre A et de rayon 2.

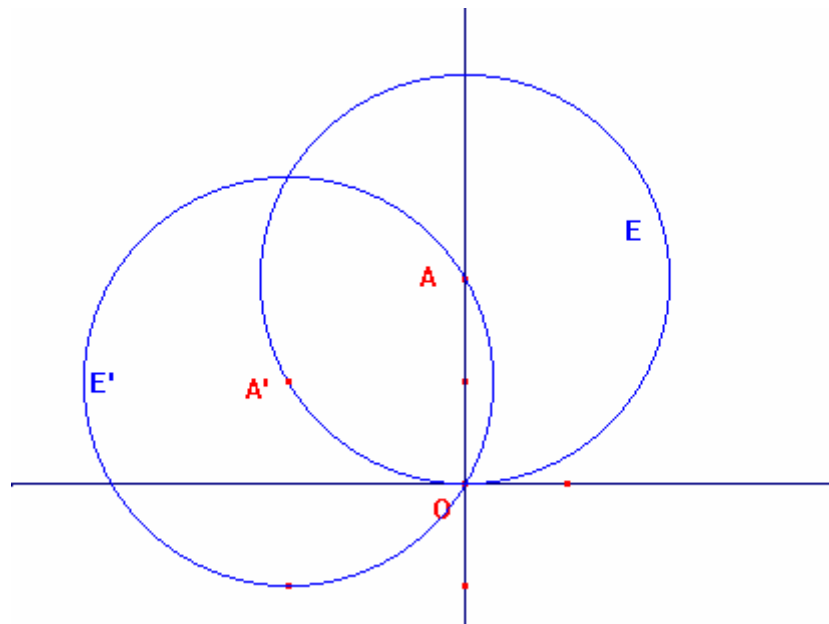
b) Soit  $E'$  l'image de  $E$  par la l'application  $f: f(M)=M' \Leftrightarrow z'=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z$

$$\arg\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3} \text{ (mod } 2\pi) \text{ et } \left|\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right|=1, \text{ donc on } \frac{1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

d'où:  $\boxed{z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z}$ , c'est l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

L'image  $E'_1$  de  $E_1$  est le cercle de centre  $A'$  image de A par  $f$  et de même rayon 2.

Construction :



### Exercice 3

1) Pour tout nombre complexe  $z \neq 1$ ,

$$(1) \frac{z-2}{z-1} = z \Leftrightarrow z(z-1) = z-2 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-1)^2 - i^2 = 0 \Leftrightarrow (z-1-i)(z-1+i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z_1 = 1+i \text{ ou } z_2 = 1-i}$$

$$|z_1| = |1+i| = \sqrt{2}, \text{ un argument de } z_1 \text{ est } \frac{\pi}{4} \text{ (mod } 2\pi).$$

$$z_2 = \bar{z}_1, \text{ donc } |z_2| = |z_1| = \sqrt{2}, \text{ et } \arg z_2 = -\arg z_1 = -\frac{\pi}{4} \text{ (mod } 2\pi).$$

$$2) \text{ L'équation (2) est équivalente à : } z-2 = i(z-1) \Leftrightarrow z-iz = 2-i \Leftrightarrow z = \frac{2-i}{1-i}, \text{ soit } \boxed{z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i}$$

3) Soit M, A et B les points d'affixes respectives:  $z, 1$  et  $2$ .

$$a) \left| \frac{z-2}{z-1} \right| = \frac{|z-2|}{|z-1|} = \frac{BM}{AM}$$

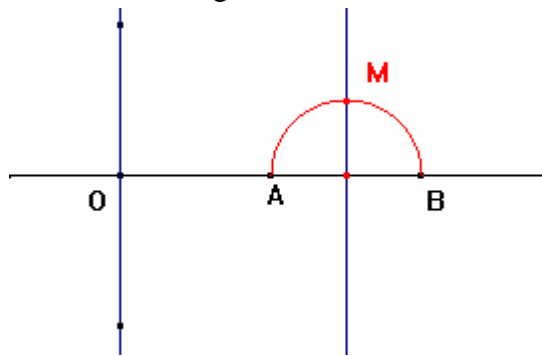
$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right) &= \arg(z-2) - \arg(z-1) \quad (2\pi) \\ &= (\vec{u}; \overrightarrow{BM}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) \\ &= (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) \quad (2\pi) \end{aligned}$$

$$\boxed{\arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right) = (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) \quad (2\pi)}$$

$$b) (2) \Leftrightarrow \frac{z-2}{z-1} = i \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z-2}{z-1} \right| = |i| \\ \arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right) = \arg(i) \quad (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{BM}{AM} = 1 \\ (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BM = AM \\ (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \end{cases}$$

Si  $z$  est solution de l'équation (2), le point M image de  $z$ ,

se trouve sur l'intersection de la médiatrice du segment [AB] et le cercle de diamètre [AB].



3)a) Soit  $n$  un entier naturel non nul, et  $z$  une solution de l'équation dans  $\mathbb{C}$ :  $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i$

$$\left|\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n\right| = \left|\left(\frac{z-2}{z-1}\right)\right|^n \quad \text{Propriété des modules}$$

$$\left|\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n\right| = |i| = 1 \Leftrightarrow \left|\left(\frac{z-2}{z-1}\right)\right|^n = 1 \Leftrightarrow \left|\left(\frac{z-2}{z-1}\right)\right| = 1 \Leftrightarrow \boxed{BM = AM} \text{ d'après la question précédente.}$$

le point M est sur la médiatrice de [AB], donc  $\boxed{\operatorname{Re}(z) = \frac{3}{2}}$

En effet le milieu I de [AB] a pour affixe :  $z = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ .

3)b) D'après a) si  $z$  est solution de l'équation  $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$ , alors  $z$  s'écrit sous la forme

$$z = \frac{3}{2} + iy, \text{ où } y \text{ est un nombre réel.}$$

Exercice 4Ensembles de points et arguments

$$1) \arg(z+1) = \frac{\pi}{2} (2\pi). \text{ Soit A le point d'affixe } z_A = -1$$

$$\arg(z+1) = \arg(z - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{MA})(2\pi)$$

$$\arg(z+1) = \frac{\pi}{2} (2\pi) \Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

M est sur la demi droite d'origine A exclu et de vecteur directeur  $\vec{v}$ .

$$2) \arg(3i - z) = 0(2\pi) \Leftrightarrow \arg(-(z - 3i)) = 0(2\pi)$$

$$\Leftrightarrow \arg(-1) + \arg(z - 3i) = 0(2\pi) \Leftrightarrow \pi + \arg(z - z_A) = 0(2\pi)$$

$$\Leftrightarrow \arg(z - z_A) = \pi(2\pi) \Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{MA}) = \pi(2\pi)$$

M est sur la droite d'origine A exclu et de vecteur directeur  $-\vec{u}$

$$3) \arg((1+i)z+1) = \pi(2\pi)$$

$$(1+i)z+1 = (1+i)\left(z + \frac{1-i}{1+i}\right)$$

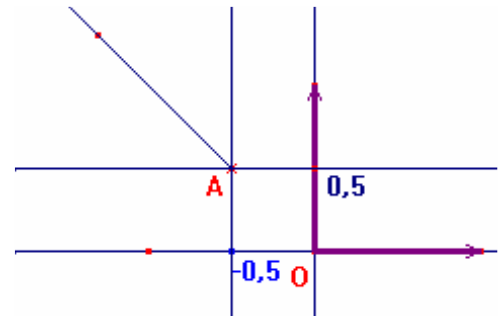
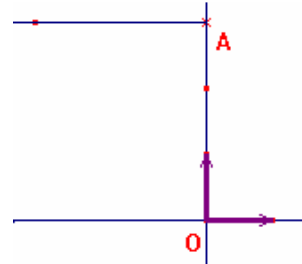
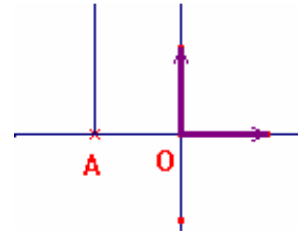
$$\begin{aligned} \arg((1+i)z+1) &= \arg(1+i) \left( z + \frac{1-i}{2} \right) \\ &= \arg(1+i) + \arg\left(z + \frac{1-i}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} (2\pi). \text{ Soit A le point d'affixe } z_A = -\frac{1-i}{2}$$

$$\arg((1+i)z+1) = \pi(2\pi) \Leftrightarrow \arg(1+i) + \arg(z - z_A) = \pi(2\pi)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + (\vec{u}; \overrightarrow{MA}) = \pi(2\pi) \Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{MA}) = \frac{3\pi}{4} (2\pi).$$

M est sur la demie droite d'origine A exclu et de vecteur directeur  $\vec{w}(-1;1)$

Exercice 5

$$z_1 = 5\sqrt{2}(1+i) \text{ et } z_2 = -5(1+i\sqrt{3}). \text{ Posons } \arg z_1 = \theta_1(2\pi) \text{ et } \arg z_2 = \theta_2(2\pi)$$

$$1) \text{ Module et arguments des nombres complexes: } z_1, z_2, \bar{z}_1, \frac{1}{z_1}$$

$$|z_1| = |5\sqrt{2}(1+i)| = 5\sqrt{2}|1+i| = 5\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 10$$

$$\text{On a } \cos \theta_1 = \sin \theta_1 = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ donc } \theta_1 = \frac{\pi}{4} (2\pi).$$

$$|z_2| = |-5(1+i\sqrt{3})| = 5|1+i\sqrt{3}| = 10.$$

$$\cos \theta_2 = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin \theta_2 = \frac{-5\sqrt{3}}{10} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc } \theta_2 = -\frac{2\pi}{3} (2\pi).$$

$$|\bar{z}_1| = |z_1| = 10 ; \arg \bar{z}_1 = -\arg z_1 = -\frac{\pi}{4} (2\pi). \quad \left| \frac{1}{z_1} \right| = \frac{1}{|z_1|} = \frac{1}{10} ; \arg \frac{1}{z_1} = -\arg z_1 = -\frac{\pi}{4} (2\pi)$$

2) Soit  $Z$  le nombre complexe tel que :  $z_1 Z = z_2$

$$Z = \frac{z_2}{z_1} \text{ d'où } |Z| = \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = 1. \quad \arg Z = \arg \frac{z_2}{z_1} = \arg z_2 - \arg z_1 (2\pi)$$

$$\arg Z = -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} (2\pi) \quad \arg Z = \frac{-11\pi}{12} (2\pi) = \frac{13\pi}{12} (2\pi).$$

On en déduit la forme trigonométrique de  $Z$  : 
$$Z = \cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$$

Forme algébrique de  $Z$ :

$$Z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{-5(1+i\sqrt{3})}{5\sqrt{2}(1+i)} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \times \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(-1-\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$$

$$Z = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \boxed{Z = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$$

3) En égalisant les formes algébrique et trigonométrique de  $Z$  on a

$$Z = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = \cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$$

on en déduit que : 
$$\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

### Exercice 6

1)a)  $ABC$  est un triangle,  $I$  le milieu de  $[BC]$  et  $D$  le barycentre des points :  $(A; -1), (B; 2), (C; 2)$

$I$  le milieu de  $[BC] \Leftrightarrow I$  isobarycentre des points  $(B; 2), (C; 2)$ .

$D$  le barycentre des points :  $(A; -1), (B; 2), (C; 2) \Leftrightarrow -\vec{DA} + 2\vec{DB} + 2\vec{DC} = \vec{0}$

D'après l'associativité des barycentres on a,  $D$  est aussi barycentre des points  $(A; -1), (I; 4)$

D'où la relation :  $-\vec{DA} + 4\vec{DI} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AD} = \frac{4}{3}\vec{AI}$ .

b) Soit  $E$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :  $\|-\vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\|$  \*

Si  $G$  le centre de gravité du triangle  $ABC$ , alors on a  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

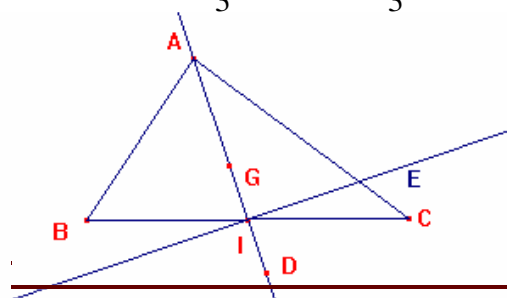
La relation \* devient :  $\|3\vec{MD}\| = \|3\vec{MG}\| \Leftrightarrow MD = MG$ .

l'ensemble  $E$  est la médiatrice du segment  $[DG]$ . Cet ensemble passe par le point  $I$  car si  $M=I$ , on a

$$\|-\vec{IA} + 2\vec{IB} + 2\vec{IC}\| = \|\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC}\| \Leftrightarrow \|-\vec{IA}\| = \|\vec{IA}\| \text{ puisque } \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}.$$

Par le calcul, on montre que  $I$  est le milieu de  $[DG]$ : d'une part on a  $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AI} \Rightarrow \vec{IG} = \frac{1}{3}\vec{IA}$ .

D'autre part :  $\vec{AD} = \frac{4}{3}\vec{AI} \Rightarrow \vec{ID} = \frac{1}{3}\vec{AI}$ . d'où  $\vec{IG} + \vec{ID} = \frac{1}{3}\vec{IA} + \frac{1}{3}\vec{AI} = \vec{0}$



2) Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$

A a pour affixe  $z_A = 1$ , B a pour affixe  $z_B = 2i$ , C a pour affixe  $z$

$$a) \left| \frac{z-2i}{1-2i} \right| = \left| \frac{z-z_B}{z_A-z_B} \right| = \frac{|z-z_B|}{|z_A-z_B|} = \frac{BC}{BA}. \quad \boxed{\left| \frac{z-2i}{1-2i} \right| = \frac{BC}{BA}}$$

$$\arg\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right) = \arg\left(\frac{z-z_B}{z_A-z_B}\right) = \arg(z-z_B) - \arg(z_A-z_B) \quad (2\pi)$$

$z-z_B$  est l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{BC}$ ,  $z_A-z_B$  est l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{BA}$ .

$\arg(z-z_B) - \arg(z_A-z_B) = (\vec{u}; \overrightarrow{BC}) - (\vec{u}; \overrightarrow{BA}) \quad (2\pi)$  en utilisant la relation de Chasles, on obtient:

$$\arg(z-z_B) - \arg(z_A-z_B) = (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \quad (2\pi).$$

$$\text{Donc } \boxed{\arg\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right) = (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \quad (2\pi)}$$

Soit  $\alpha$  le réel de  $]-\pi; 0]$  tel que  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ .

Le point C est défini par:  $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \alpha$  et par  $BC = \sqrt{\frac{2}{5}} BA \Leftrightarrow \frac{BC}{BA} = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ .

b) Valeur exacte de  $\sin \alpha$ :

on a  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$  car  $\sin \alpha < 0$  ( $\alpha \in ]-\pi; 0]$ ).

$$\text{D'où } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \frac{1}{10}} \text{ soit } \boxed{\sin \alpha = \frac{-3\sqrt{10}}{10}}.$$

c) la forme trigonométrique de tout nombre complexe  $z$  est:  $z = |z| [\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)]$

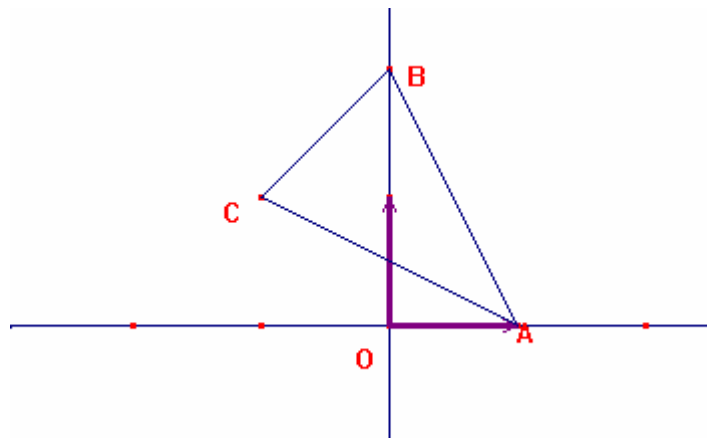
Comme  $\left| \frac{z-2i}{1-2i} \right| = \frac{BC}{BA}$  et  $\arg\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right) = (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \alpha \quad (2\pi)$ , alors  $\frac{z-2i}{1-2i}$  s'écrit sous la forme:

$$\frac{z-2i}{1-2i} = \frac{BC}{BA} (\cos \alpha + i \sin \alpha) = \frac{\sqrt{10}}{5} \left( \frac{1}{\sqrt{10}} - i \frac{3\sqrt{10}}{10} \right) \text{ après simplification, on obtient: } \boxed{\frac{z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5}}$$

On résout l'équation d'inconnue  $z$ :  $\frac{z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5} \Leftrightarrow z-2i = \frac{1-3i}{5} \times (1-2i) \Leftrightarrow \boxed{z = -1+i}$ .

d)  $AB = |1-2i| = \sqrt{5}$ ,  $AC = |z-1| = |-1+i-1| = \sqrt{5}$ .

Le triangle ABC est isocèle en A.



Exercice 7

A tout nombre complexe  $z = x + iy$

on associe le nombre complexe  $f(z) = e^y [\cos(\pi x) + i \sin(\pi x)]$ .

$$1) z = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow f(0) = e^0 [\cos(0) + i \sin(0)] = 1.$$

$$z = i \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 1 \Rightarrow f(i) = e^1 [\cos(0) + i \sin(0)] = e.$$

$$z = -i \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = -1 \Rightarrow f(-i) = e^{-1} [\cos(0) + i \sin(0)] = e^{-1}.$$

$$z = 1 + i \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } y = 1 \Rightarrow f(1 + i) = e^1 [\cos(\pi) + i \sin(\pi)] = -e.$$

$$z = 1 - i \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } y = -1 \Rightarrow f(1 - i) = e^{-1} [\cos(\pi) + i \sin(\pi)] = -e^{-1}.$$

Notons ces points  $M_1, M_2, M_3, M_4$  et  $M_5$  :

2) Montrons que  $f(z)$  est non nul: on a  $f(z) = e^y [\cos(\pi x) + i \sin(\pi x)]$

En utilisant la notation exponentielle d'un nombre complexe

$$\cos(\pi x) + i \sin(\pi x) = e^{i\pi x}, \text{ donc } f(z) \text{ s'écrit } f(z) = e^y \times e^{i\pi x} = e^{y+i\pi x}$$

Comme  $e^a > 0$ , on en déduit que  $f(z)$  est non nul.

$\cos(\pi x) + i \sin(\pi x) = e^{i\pi x}$  est un nombre complexe d'argument  $(\pi x)$  et de module 1

$$|f(z)| = |e^y \times e^{i\pi x}| = e^y \times |e^{i\pi x}| = 1, \arg(f(z)) = \arg(e^y \times e^{i\pi x}) = \arg(e^{i\pi x}) = \pi x \pmod{2\pi}.$$

$f(z)$  a pour module 1 et pour argument  $\pi x \pmod{2\pi}$ .  $f(z) = e^y \times e^{i\pi x}$

3) Pour cette question, on utilise les propriétés de la fonction exponentielle:  $e^{a+b} = e^a \times e^b$ ;  $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ ;  $e^{na} = (e^a)^n$

a) Soit  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes:  $z + z' = (x + x') + i(y + y')$

$$f(z + z') = e^{(y+y')} \times e^{i\pi(x+x')}$$

$$= e^y \times e^{y'} \times e^{i\pi x} \times e^{i\pi x'} = e^y \times e^{i\pi x} \times e^{y'} \times e^{i\pi x'}$$

$$= e^{y+i\pi x} \times e^{y'+i\pi x'}$$

$$= f(z) \times f(z').$$

$$f(z + z') = f(z) \times f(z')$$

$$z - z' = (x - x') + i(y - y')$$

$$f(z - z') = e^{(y-y')} \times e^{i\pi(x-x')} = e^y \times e^{i\pi x} \times e^{-y'} \times e^{-i\pi x'}$$

$$= e^{y+i\pi x} \times e^{-y'-i\pi x'} = e^{y+i\pi x} \times e^{-(y'+i\pi x')}$$

$$f(z - z') = \frac{f(z)}{f(z')}$$

$$= \frac{e^{y+i\pi x}}{e^{-(y'+i\pi x')}} = \frac{f(z)}{f(z')}.$$

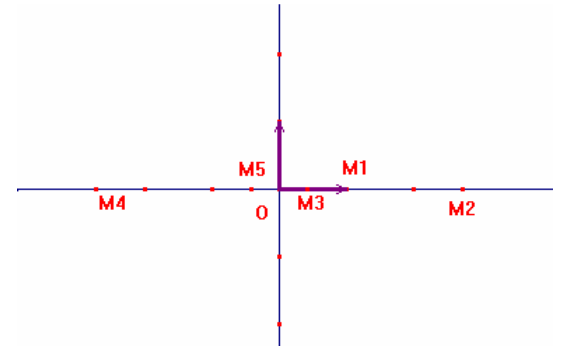
b) Pour tout entier relatif  $n$ :  $nz = n(x + iy) = (nx) + i(ny)$ ,

$$f(nz) = e^{ny} \times e^{in\pi x} = e^{ny+in\pi x}$$

$$= e^{n(y+i\pi x)} = (e^{y+i\pi x})^n$$

$$f(nz) = (f(z))^n$$

$$= (e^y \times e^{i\pi x})^n = (f(z))^n$$



4) Soit le nombre complexe  $w = 1 + i$ .  $A, B, C$  et  $D$  les points d'affixes respectives:

$$z_A = w = 1 + i$$

$$z_B = \bar{w} = 1 - i$$

$$z_C = -w = -1 - i$$

$$z_D = -\bar{w} = -1 + i$$

a) Soit  $L$  l'ensemble des points d'affixe  $z = x + iy$  qui vérifie :  $\begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ y = 1 \text{ ou } y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Un point  $M(x, y) \in L$  si ses coordonnées vérifient les deux systèmes

Le système  $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ y = 1 \end{cases}$  correspond au segment  $[AD]$

Le système  $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ y = -1 \end{cases}$  correspond au segment  $[BC]$

L'ensemble  $L$  est donc la réunion de ces deux segments.

Soit  $z$  l'affixe d'un point de  $L \Leftrightarrow z = x \pm i$

D'après la question 2)  $|f(z)| = e^y$  et  $\arg(f(z)) = \pi x$

ici on a ( $y = 1$  et  $-1 \leq x \leq 1$ ) ou ( $y = -1$  et  $-1 \leq x \leq 1$ ). On a donc deux ensembles

$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -\pi \leq \pi x \leq \pi$ , l'argument de  $f(z)$ ,  $\pi x$  décrit donc  $[-\pi; \pi]$

( $y = 1$  et  $-1 \leq x \leq 1$ )  $\Leftrightarrow |f(z)| = e^y = e$  et  $\arg(f(z)) \in [-\pi; \pi]$ ,

donc les points d'affixes  $f(z)$  sont sur le cercle  $C_1$  de centre 0 et de rayon  $e$ .

( $y = -1$  et  $-1 \leq x \leq 1$ )  $\Leftrightarrow |f(z)| = e^y = e^{-1}$  et  $\arg(f(z)) \in [-\pi; \pi]$ ,

donc les points d'affixes  $f(z)$  sont sur le cercle  $C_2$  de centre 0 et de rayon  $e^{-1} = \frac{1}{e}$ .

Si  $M(z) \in L$ , le point d'affixe  $f(z)$  est sur  $C_1$  ou  $C_2$ .

b) Soit  $K$  l'ensemble des points d'affixe  $z = x + iy$  qui vérifie :  $\begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow M(x, y) \text{ se trouve à l'intérieur du carré } ABCD \text{ cotés compris.}$$

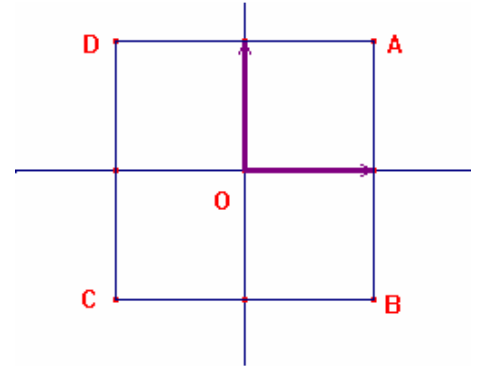
Le même raisonnement que a)

$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -\pi \leq \pi x \leq \pi$ , l'argument de  $f(z)$ ,  $\pi x$  décrit donc  $[-\pi; \pi]$

$|f(z)| = e^y$ , or  $-1 \leq y \leq 1 \Rightarrow e^{-1} \leq e^y \leq e^1$ .

Le module de  $f(z)$  vérifie donc:  $e^{-1} \leq |f(z)| \leq e^1$

L'ensemble des points d'affixe  $f(z)$  est donc la partie du plan limitée par les cercles  $C_1$  et  $C_2$  de la question précédente. C'est la couronne comprise entre ces deux cercles.



Exercice 8

1) Pour tout couple de nombre complexes  $(z, z')$ , on pose:  $\varphi(z, z') = z\bar{z}' + \bar{z}z'$ .

$$\varphi(i, 3) = i \times 3 + (-i) \times 3 = 0$$

$$\varphi(1+2i, -2+i) = (1+2i)(-2+i) + \overline{(1+2i)}(-2+i) = (1+2i)(-2-i) + (1-2i)(-2+i) = 0$$

$$\varphi(2+i, -3+2i) = (2+i)(-3+2i) + \overline{(2+i)}(-3+2i) = (2+i)(-3-2i) + (2-i)(-3+2i) = -8.$$

$$\varphi(e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}) = e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{-i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{6}} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3})} + e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = e^{-i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{2}} = -i + i = 0.$$

Montrons que pour tout couple  $(z, z')$  le nombre  $\varphi(z, z')$  est réel:

Rappel: un nombre complexe quelconque  $z$  est réel si et seulement si  $\text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0$

Donc  $\varphi(z, z')$  est réel si et seulement si  $\varphi(z, z') - \overline{\varphi(z, z')} = 0$

$$\varphi(z, z') = z\bar{z}' + \bar{z}z' \text{ et } \overline{\varphi(z, z')} = \overline{z\bar{z}' + \bar{z}z'} = \bar{z}\bar{\bar{z}'} + \bar{\bar{z}}\bar{z}' = \bar{z}z' + z\bar{z}'$$

d'où  $\varphi(z, z') - \overline{\varphi(z, z')} = z\bar{z}' + \bar{z}z' - \bar{z}z' - z\bar{z}' = 0$ . Donc on a bien  $\varphi(z, z')$  un réel.

2)a) On pose  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$ ;  $x, y, x', y'$  des réels.

$$\begin{aligned} \varphi(z, z') &= z\bar{z}' + \bar{z}z' = (x+iy)(x'+iy') + \overline{(x+iy)}(x'+iy') \\ &= (x+iy)(x'-iy') + (x-iy)(x'+iy') \\ &= xx' - ixy' + iyx' + yy' + xx' + ixy' - iyx' + yy' \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi(z, z') = 2xx' + 2yy'}$$

b) Soit  $D$  l'ensemble des points  $M$  d'affixes  $z$  tels que:  $\varphi(z, 1+i) = 2\sqrt{2}$

En appliquant la relation précédente avec  $x' = y' = 1$ , on a

$$\varphi(z, 1+i) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2x + 2y = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \boxed{x + y = 2\sqrt{2}}.$$

$D$  est donc la droite d'équation cartésienne  $x + y = 2\sqrt{2}$ . voir Figure.

3)a) On pose  $z = re^{i\theta}$  et  $z' = r'e^{i\theta'}$ ;  $\theta$  et  $\theta'$  réels,  $r$  et  $r'$  réels positifs.

$$\bar{z} = re^{-i\theta} \text{ et } \bar{z}' = r'e^{-i\theta'}$$

$$\varphi(z, z') = z\bar{z}' + \bar{z}z' = re^{i\theta} \times r'e^{-i\theta'} + re^{-i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'[e^{i\theta} \times e^{-i\theta'} + e^{-i\theta} \times e^{i\theta'}]$$

$$\varphi(z, z') = rr'[e^{i\theta-i\theta'} + e^{-i\theta+i\theta'}] = rr'[e^{i(\theta-\theta')} + e^{-i(\theta-\theta')}]$$

Rappel Formule d'Euler: pour tout réel  $\theta$ , on a:  $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ .

Donc,  $\varphi(z, z') = rr'[e^{i(\theta-\theta')} + e^{-i(\theta-\theta')}] = rr' \times 2 \cos(\theta - \theta')$ .

$$\text{soit } \boxed{\varphi(z, z') = 2rr' \cos(\theta - \theta')}$$

$$\text{b) } \varphi(z, z) = 2rr \cos(\theta - \theta) = 2r^2 \quad \boxed{\varphi(z, z) = 2r^2}$$

Soit  $C$  l'ensemble des points  $M$  d'affixes  $z$  tels que  $\varphi(z, z) = 2$ .

$$\varphi(z, z) = 2 \Leftrightarrow 2r^2 = 2 \Leftrightarrow r^2 = 1 \Leftrightarrow r = 1 \Leftrightarrow \boxed{|z| = 1 \Leftrightarrow OM = 1}.$$

$C$  est donc le cercle trigonométrique (centre  $O$  et rayon 1).

$C$  et  $D$  sont tangents. En effet soit  $A$  le point d'intersection de  $C$  et  $D$ .

$$A(x, y) \text{ vérifie le système: } \begin{cases} x + y = \sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2} - x \\ x^2 + (\sqrt{2} - x)^2 = 1 \end{cases}$$

L'équation  $x^2 + (\sqrt{2} - x)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

Son discriminant est  $\Delta = 0$ , elle admet une seule solution double:  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

d'où  $y = \sqrt{2} - x = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Les coordonnées du point A, sont  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

Soit  $\vec{w}$  un vecteur directeur de la droite D,  $\vec{w}$  a pour coordonnées:  $\vec{w}(-1;1)$ .

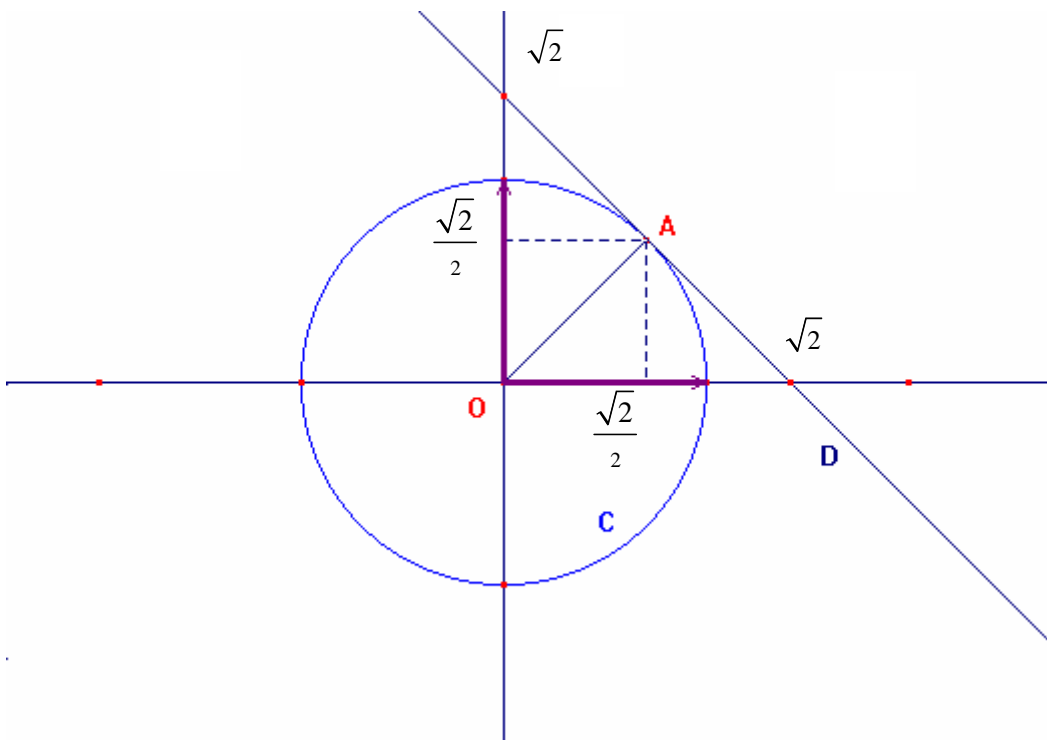
Montrons que les vecteurs  $\vec{OA}$  et  $\vec{w}$  sont perpendiculaires.

Calculons le produit scalaire:  $\vec{OA} \cdot \vec{w} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

Donc les vecteurs  $\vec{OA}$  et  $\vec{w}$  sont perpendiculaires, OA étant un rayon du cercle C,

On en déduit que C et D sont tangents en A.

Figure :



**Exercice n° 9** : Les parties A et B sont indépendantes.

## PARTIE A

$$\begin{aligned}
 1) \text{ Dire que le réel } x \text{ est solution de (E) signifie que } & x^3 - (4+i)x^2 + (7+i)x - 4 = 0 \\
 \text{d'où} & x^3 - 4x^2 - ix^2 + 7x + ix - 4 = 0 \\
 \text{soit} & (x^3 - 4x^2 + 7x - 4) + i(x - x^2) = 0 \\
 \text{donc} & \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = 0 \\ x(1-x) = 0 \end{cases} \\
 \text{d'où} & \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = -4 \neq 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = 1 - 4 + 7 - 4 = 0 \\ x = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Enfinement le réel 1 est solution de l'équation (E).

$$\begin{aligned}
 2) (z-1)(z-2-2i)(\alpha z + \beta) &= (z^2 - 2z - 2iz - z + 2 + 2i)(\alpha z + \beta) = [z^2 + (-3-2i)z + (2+2i)](\alpha z + \beta) \\
 (z-1)(z-2-2i)(\alpha z + \beta) &= \alpha z^3 + \beta z^2 + \alpha(-3-2i)z^2 + \beta(-3-2i)z + \alpha(2+2i)z + \beta(2+2i) \\
 (z-1)(z-2-2i)(\alpha z + \beta) &= \alpha z^3 + [\beta + \alpha(-3-2i)]z^2 + [\beta(-3-2i) + \alpha(2+2i)]z + \beta(2+2i)
 \end{aligned}$$

Ecrire que, pour tout nombre complexe  $z$ ,  $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z-1)(z-2-2i)(\alpha z + \beta)$

équivalent à, pour tout nombre complexe  $z$ ,

$$z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = \alpha z^3 + [\beta + \alpha(-3-2i)]z^2 + [\beta(-3-2i) + \alpha(2+2i)]z + \beta(2+2i)$$

$$\text{d'où} \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + \alpha(-3-2i) = -(4+i) \\ \beta(-3-2i) + \alpha(2+2i) = 7+i \\ \beta(2+2i) = -4 \end{cases} \quad \text{donc} \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -4 - i + 3 + 2i = -1 + i \\ \beta(-3-2i) = 5 - i \\ \beta(2+2i) = -4 \end{cases}$$

$$\text{soit} \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 + i \\ \beta = \frac{5-i}{-3-2i} = \frac{(5-i)(-3+2i)}{9+4} = \frac{-15+10i+3i+2}{13} = \frac{-13+13i}{13} = -1+i \\ \beta = \frac{-4}{2+2i} = \frac{-4}{2(1+i)} = \frac{-2(1-i)}{1+1} = -1+i \end{cases}$$

Enfinement, pour tout nombre complexe  $z$ ,  $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z-1)(z-2-2i)(z-1+i)$

$$3) (E) \text{ équivaut à } (z-1)(z-2-2i)(z-1+i) = 0$$

L'équation (E) a donc trois solutions : le réel 1 et les complexes  $2+2i$  et  $1-i$

## PARTIE B

1) .a. M est le point d'affixe  $z = x + iy$ , avec  $x$  et  $y$  réels donc  $z_{\overline{OM}} = z = x + iy$  d'où  $\overline{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

M' est le point d'affixe  $z' = x' + iy'$ , avec  $x'$  et  $y'$  réels donc  $z_{\overline{OM'}} = z' = x' + iy'$  d'où  $\overline{OM'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$z' \times \bar{z} = (x' + iy')(x - iy) = x'x - ix'y + iy'x + yy' \quad \text{soit} \quad z' \times \bar{z} = (xx' + yy') + i(xy' - yx')$$

$$\overline{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \overline{OM'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux si et seulement si } \overline{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \overline{OM'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{si et seulement si } xx' + yy' = 0$$

$$\text{si et seulement si } \operatorname{Re}(z' \times \bar{z}) = 0$$

$$\text{b. } c \times \bar{b} = (1 - i)(2 - 2i) = 2 - 2i - 2i - 2 = -4i \quad \text{ou} \quad b \times \bar{c} = (2 + 2i)(1 + i) = 2 + 2i + 2i - 2 = 4i$$

$$\text{donc } \operatorname{Re}(c \times \bar{b}) = 0$$

$$\text{ou } \operatorname{Re}(b \times \bar{c}) = 0$$

d'où  $\overline{OB}$  et  $\overline{OC}$  sont orthogonaux

soit  $OBC$  est un triangle rectangle en  $O$

$$2) * |b| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad \text{donc} \quad b = 2\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$(\overline{OA}; \overline{OB}) = (\vec{u}; \overline{OB}) = \arg(b) = \frac{\pi}{4}$$

$$* |c| = \sqrt{2} \quad \text{donc} \quad c = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$(\overline{OC}; \overline{OA}) = (\overline{OC}; \vec{u}) = -\arg(c) = \frac{\pi}{4}$$

$$* (\overline{OC}; \overline{OA}) = (\overline{OA}; \overline{OB}) \quad \text{donc } (OA) \text{ est la bissectrice de l'angle (droit) en } O$$

3) . a. Le nombre complexe dont le module est 1 et dont un argument est  $-\frac{\pi}{2}$  est  $-i$

$$\text{On a donc } \frac{c-d}{c} = -i \Leftrightarrow c-d = -ic \Leftrightarrow d = c+ic \Leftrightarrow d = c(1+i) \Leftrightarrow d = (1-i)(1+i)$$

$$\text{donc } d = 2$$

$$\text{b. } * \left| \frac{c-d}{c} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{DC}{OC} = 1 \Leftrightarrow OC = CD$$

$$* \arg\left(\frac{c-d}{c}\right) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\overline{OC}; \overline{DC}) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{donc } (OC) \perp (CD)$$

Puisque l'on a  $(OC) \perp (CD)$  et  $(OC) \perp (OB)$ ,

on en déduit que les droites  $(OB)$  et  $(CD)$  sont parallèles.

\*  $OCDB$  est donc un trapèze rectangle et isocèle en  $C$