

Résumé
Oscillations électriques
Libres

#Partagiiii <3



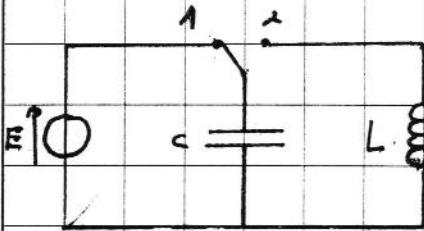


le / 11

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

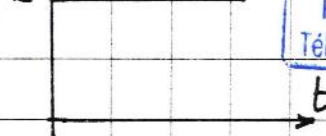
Oscillateurs électriques libres

I. Oscillateurs électriques libres non amortis

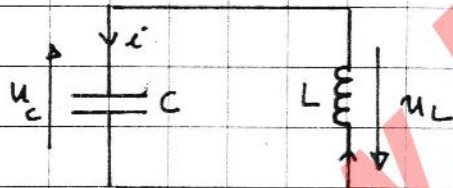


On ferme K en position (1)
le condensateur se charge
instantanément

E U_C



on bascule le commutateur
en position (2)



1) a) Equation différentielle
vérifiée par U_C

On applique la loi des
mailles

$$U_L + U_C = 0$$

$$\Rightarrow L \frac{di}{dt} + U_C = 0 \quad / \quad i = C \frac{dU_C}{dt}$$

$$\Rightarrow L C \frac{d^2 U_C}{dt^2} + U_C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} U_C = 0$$

En déduire l'équation
différentielle vérifiée
par U_L

$$U_L + U_C = 0 \Rightarrow U_C = -U_L$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 (-U_L)}{dt^2} + \frac{1}{LC} (-U_L) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 U_L}{dt^2} + \frac{1}{LC} U_L = 0$$

b) Equation différentielle
vérifiée par q

On applique la loi
des mailles

$$U_L + U_C = 0$$

$$\Rightarrow L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} q = 0 \quad / \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

c) Equation différentielle
vérifiée par i

On applique la loi des
mailles

$$U_L + U_C = 0$$

$$\Rightarrow L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$$

On dérive par rapport
au temps $L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0$

$$\Rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i = 0$$

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

YAMAHA
HIGH QUALITY





le, (2.)

2) a) Vérifier que $u_c(t) = U_{cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{uc})$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est une solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_c = 0$$

$$u_c(t) = U_{cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{uc})$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} = -\omega_0^2 U_{cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{uc})$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (U_{cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{uc})) + \omega_0^2 U_{cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{uc}) =$$

$$= -\omega_0^2 U_{cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{uc}) + \omega_0^2 U_{cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{uc}) = 0$$

alors $u_c(t) = U_{cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{uc})$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est une solution de l'équation différentielle.

b)

Vérifier que $u_c(t) = U_{cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{uc})$ est solution de l'équation différentielle $\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_c = 0$ pour une expression de ω_0 que l'on précisera

$$u_c(t) = U_{cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{uc})$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} = -\omega_0^2 \underbrace{U_{cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{uc})}_{u_c(t)} = -\omega_0^2 u_c(t)$$

$$-\omega_0^2 u_c(t) + \frac{1}{LC} u_c(t) = 0 \Rightarrow \forall t, \left(\frac{1}{LC} - \omega_0^2 \right) u_c(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{LC} - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

Remarque

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ (pulsation propre (rad.s}^{-1}\text{))}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC} \text{ (période propre (s))}$$

$$N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \text{ (fréquence propre (Hz))}$$

YAMAMA
HIGH QUALITY





le (3.)

3) Soit $u_c(t) = U_{cm} \sin(\omega t + \varphi_c)$

a) Donner les expressions de $q(t)$ et $u_L(t)$

• $q = C u_c$

$$q(t) = C U_{cm} \sin(\omega t + \varphi_c) = Q_m \sin(\omega t + \varphi_q)$$

$$\text{avec } Q_m = C U_{cm}$$

$$\varphi_q = \varphi_c \Rightarrow \varphi_q - \varphi_c = 0$$

$\Rightarrow q$ et u_c sont en phase

• $u_L + u_c = 0 \Rightarrow u_L = -u_c$

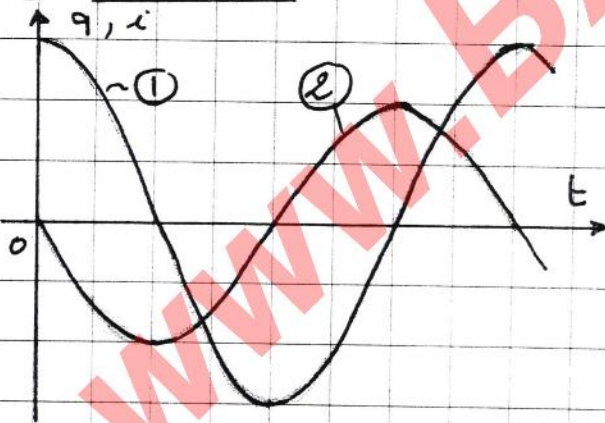
$$\begin{aligned} u_L(t) &= -U_{cm} \sin(\omega t + \varphi_c) \\ &= U_{cm} \sin(\omega t + \varphi_c + \pi) \\ &= U_{Lm} \sin(\omega t + \varphi_{uL}) \end{aligned}$$

$$\text{avec } U_{Lm} = U_{cm}$$

$$\varphi_{uL} = \varphi_c + \pi$$

$\varphi_{uL} - \varphi_c = \pi \text{ rad} \Rightarrow u_L$ et u_c sont en opposition de phase

b) Exercice



$$[2 \mu\text{C} ; 1,5 \text{ mA}]$$

• de quelle des deux courbes qui correspond à $i(t)$

$$\begin{aligned} i &= \frac{dq}{dt} \Rightarrow \varphi_i = \varphi_q + \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow \varphi_i - \varphi_q = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \end{aligned}$$

$\Rightarrow i$ est en quadrature avance de phase par rapport à q

la courbe ② atteint son maximum la 1^{ère} $\Rightarrow$

$$\text{②} \leadsto i(t)$$

• Donner les expressions de $q(t)$ et $i(t)$

$$Q_m = 3 \times 2 = 6 \mu\text{C} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$I_m = 2 \times 1,5 = 3 \text{ mA} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

$$I_m = \omega_0 Q_m \Rightarrow \omega_0 = \frac{I_m}{Q_m}$$

$$\omega_0 = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-6}} = 500 \text{ rad/s}$$

$$q(t) = Q_m \sin(\omega t + \varphi_q)$$

$$q(t=0) = Q_m \sin \varphi_q = Q_m$$

$$\Rightarrow \sin \varphi_q = 1$$

$$\Rightarrow \varphi_q = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$q(t) = 6 \cdot 10^{-6} \sin(500t + \frac{\pi}{2})$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

$$i(t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin(500t + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$$

$$i(t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin(500t + \pi)$$

www.BAC.org.tn

Page BAC-TUNISIE

Tél: 25 361 197 / 53 371 502

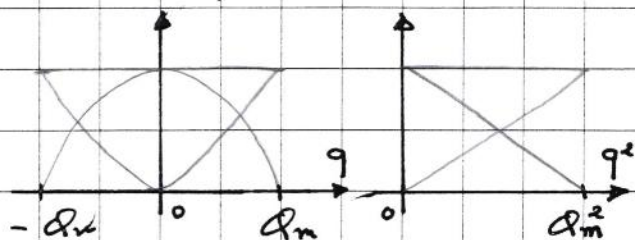
YAMAMA
HIGH QUALITY





le, (5)

Représenter E_C , E_L et E
en fonction de q et q^2
 $-Q_m \leq q \leq Q_m$
 $\Rightarrow 0 \leq q^2 \leq Q_m^2$



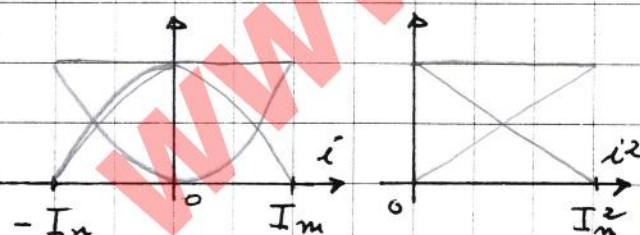
d) Exprimer les énergies
en fonction de i

$$E_L = \frac{1}{2} L i^2$$

$$E = \frac{1}{2C} q^2 + \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L I_m^2$$

$$\Rightarrow E_C = -\frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} L I_m^2$$

Représenter E_L , E_C et E
en fonction de i et i^2
 $-I_m \leq i \leq I_m$
 $0 \leq i^2 \leq I_m^2$



e) Exprimer les énergies
en fonction du temps
 $q(t) = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$
 $i(t) = \omega_0 Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_q)$

$$E_C = \frac{1}{2C} q^2 = \frac{Q_m^2}{2C} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_q)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$E_C(t) = \frac{Q_m^2}{4C} (1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_q))$$

$\frac{E_{Cmax}}{2}$

$$E_L = \frac{1}{2} L i^2$$

$$= \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_q)$$

$$= \frac{Q_m^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_q)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$E_L(t) = \frac{Q_m^2}{4C} (1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_q))$$

$\frac{E_{Lmax}}{2}$

On montre que $E = cte$

$$E = E_C + E_L$$

$$= \frac{Q_m^2}{2C} (\underbrace{\sin^2(\omega_0 t + \varphi_q) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_q)}_1)$$

$$E = \frac{Q_m^2}{2C} = cte$$

E_C et E_L deux fonctions
périodiques non sinusoïdales
de période $T = \frac{2\pi}{2\omega_0} = \frac{\pi}{\omega_0}$
ou $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2T$

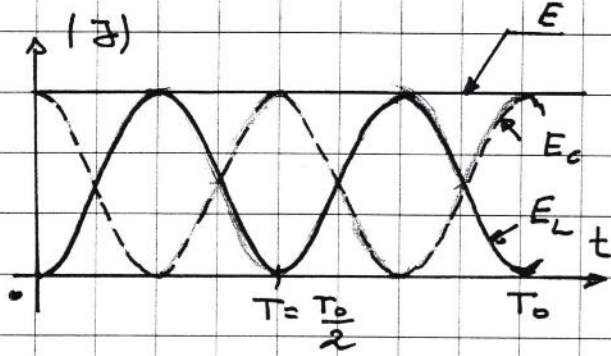
$$\Rightarrow T_{(E_C)} = T_{(E_L)} = \frac{T_0}{2} = \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{LC}$$

YAMAMA
HIGH QUALITY

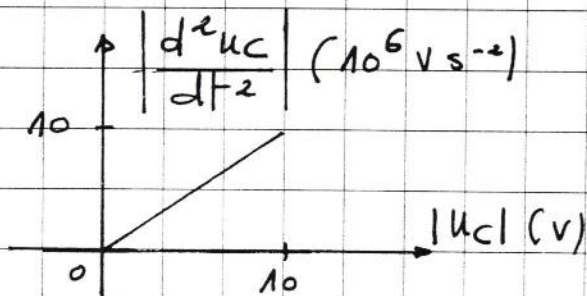




le, (6')

Exercice

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0$$



- Justifier théoriquement l'allure de cette courbe

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} &= -\omega_0^2 u_C \\ \Rightarrow \left| \frac{d^2 u_C}{dt^2} \right| &= \omega_0^2 |u_C| \end{aligned}$$

s'écrit sous la forme

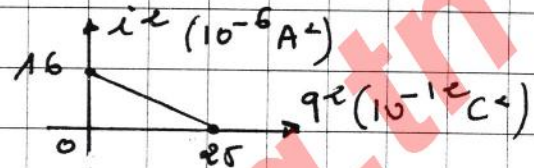
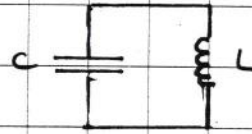
$$\left| \frac{d^2 u_C}{dt^2} \right| = a \cdot |u_C| \quad \text{avec } a = \omega_0^2 > 0$$

à l'as la courbe qui représente $\left| \frac{d^2 u_C}{dt^2} \right| = f(|u_C|)$ est une segment de droite linéaire croissante

- En déduire la valeur de ω_0

$$a = \omega_0^2 = \frac{10 \cdot 10^6}{10} = 10^6 \text{ s}^{-2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{a} = 10^3 \text{ rad s}^{-1}$$

Exercice

- En exploitant le caractère conservatif du circuit, justifier théoriquement l'allure de cette courbe

$$E = E_C + E_L = \text{cte}$$

$$E = \frac{1}{2C} q^2 + \frac{1}{2} L i^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} L i^2 = -\frac{1}{2C} q^2 + E$$

$$E = E_{C_{\text{max}}} = \frac{1}{2C} Q_m^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} L i^2 = -\frac{1}{2C} q^2 + \frac{1}{2C} Q_m^2$$

$$\Rightarrow i^2 = -\frac{1}{LC} q^2 + \frac{1}{LC} Q_m^2$$

$$\Rightarrow i^2 = -\omega_0^2 q^2 + \omega_0^2 Q_m^2$$

s'écrit sous la forme

$$i^2 = a \cdot q^2 + b \quad \text{avec}$$

$$\begin{cases} a = -\omega_0^2 < 0 \\ b = \omega_0^2 Q_m^2 = I_m^2 \end{cases}$$

donc la courbe qui



représente $i^2 = f(q^2)$
est une segment de droite
affine décroissante

• En déduire les valeurs
de Q_m , I_m et ω_0

$$\text{Pour } \begin{cases} q = \pm Q_m \\ i = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q_m^2 = 25 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2$$

$$\boxed{Q_m = 5 \cdot 10^{-6} \text{ C}}$$

$$\text{Pour } \begin{cases} i = \pm I_m \\ q = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_m^2 = 16 \cdot 10^{-6} \text{ A}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{I_m = 4 \cdot 10^{-3} \text{ A}}$$

$$a = -\omega_0^2 = -\frac{16 \cdot 10^{-6}}{25 \cdot 10^{-12}}$$

$$= -64 \cdot 10^4 \text{ rad}^2 \text{ s}^{-2} \Rightarrow u_c^2 = -\frac{L}{C} i^2 + \frac{L}{C} I_m^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0 = 800 \text{ rad s}^{-1}}$$

Autrement

$$\boxed{\omega_0 = \frac{I_m}{Q_m} = 800 \text{ rad s}^{-1}}$$

Exercice



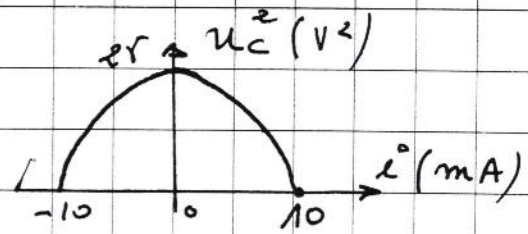
$$L = 0,1 \text{ H}$$

1) Exprimer l'énergie
totale du circuit en
fonction de u_c et i

$$E = E_C + E_L$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} C u_c^2 + \frac{1}{2} L i^2}$$

2)



a)

En exploitant le caractère
conservatif du circuit
justifier théoriquement
l'allure de cette courbe

$$E = \frac{1}{2} C u_c^2 + \frac{1}{2} L i^2 = \text{cte}$$

$$E = \frac{1}{2} E_{L_{\max}} = \frac{1}{2} L I_m^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} C u_c^2 = -\frac{1}{2} L i^2 + E$$

www.BAC.org.tn

Page: BAC-TUNISIE

Tél: 25 361 197 / 53 371 502

$$= -\frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} L I_m^2$$

s'écrit sous la forme

$$u_c^2 = a i^2 + b \text{ avec}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{L}{C} < 0 \\ b = \frac{L}{C} I_m^2 \end{cases}$$

a) Les E_C la courbe qui représente
 $u_c^2 = f(i)$ est une parabole
de concavité dirigée vers
le bas

b) En déduire les valeurs
de I_m , U_{em} et C

$$I_m = 10 \text{ mA} = 10^{-2} \text{ A}, U_{em} = 5 \text{ V}$$

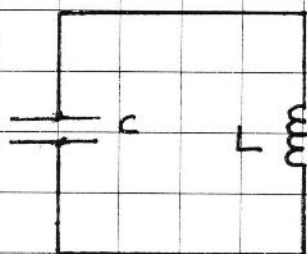
$$b = \frac{L}{C} I_m^2 = 25 \text{ V}^2$$

$$\Rightarrow C = \frac{L I_m^2}{b} = 0,4 \mu\text{F}$$

YAMAMA
HIGH QUALITY



le... (8)

Exercice

www.BAC.org.tn
Page: BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

1) a) Exprimer l'énergie totale E du circuit en fonction de q et i

$$E = E_C + E_L$$

$$E = \frac{1}{2C} q^2 + \frac{1}{2} L i^2$$

b) En exploitant le caractère conservatif du circuit, déduire l'équation différentielle vérifiée par q .

$$E = \text{cte} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2C} \left(2q \frac{dq}{dt} \right) + \frac{1}{2} L \left(2i \frac{di}{dt} \right) = 0$$

$$\Rightarrow i \left(L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} q \right) = 0 \quad \forall t$$

$$i \neq 0 \Rightarrow L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

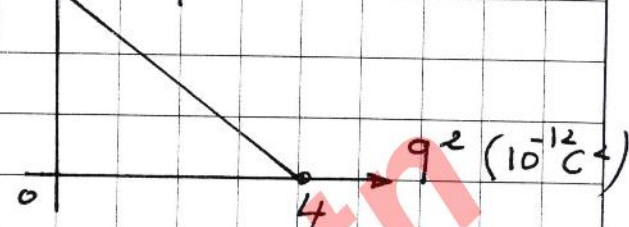
c) En déduire la nature des oscillations

la solution de cette équation différentielle est de la forme $q(t) = Q_m \sin(\omega t + \varphi)$

avec $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ donc les oscillations sont sinusoïdales (elles sont amorties)

2)

$E_L (\mu J)$



a) Justifier théoriquement l'allure de cette courbe

$$E = E_C + E_L = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2C} q^2 + \frac{1}{2} L i^2 = E = \frac{1}{2C} Q_m^2$$

$$\Rightarrow E_L = -\frac{1}{2C} q^2 + \frac{1}{2C} Q_m^2$$

s'écrit sous la forme

$$E_L = a \cdot q^2 + b \quad \text{avec}$$

$$a = -\frac{1}{2C}$$

$$b = \frac{Q_m^2}{2C}$$

alors la courbe qui représente $E_L = f(q)$ est un segment de droite affine décroissante

b) En déduire les valeurs de Q_m et C

$$Q_m^2 = 4 \cdot 10^{-12} C^2$$

$$\Rightarrow Q_m = 2 \cdot 10^{-6} C$$

$$b = E_{L_{\text{max}}} = E = \frac{Q_m^2}{2C}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q_m^2}{2b} = 10^{-6} F = 1 \mu F$$

YAMAMA
HIGH QUALITY

